От автора

Предлагаемое пособие представляет собой подробные поурочные планы по геометрии для 8 класса и ориентировано прежде всего на работу с учебным комплектом:

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия. 7–9 класс (М.: Просвещение).

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия: 8 кл. Рабочая тетрадь (М.: Просвещение).

Предлагаемые поурочные разработки в своей основе ориентированы на организацию работы класса по технологии дифференцированного обучения.

В данной книге учитель сможет найти подробные поурочные разработки, методические советы и рекомендации, тексты самостоятельных и контрольных работ в трех уровнях сложности, тестовые задания, дополнительные задачи для учащихся, задачи повышенной сложности, развивающие логическое мышление учащихся. Пособие будет полезно в первую очередь начинающему учителю, который сможет позаимствовать полностью предлагаемые сценарии уроков. Опытный учитель может использовать их частично, встраивая в собственный план урока.

К каждой главе составлены таблицы (см. приложение), являющаеся небольшим справочником по теоретическому материалу, позволяющая систематизировать базовый уровень теоретических знаний у учащихся. Такие таблицы могут быть использованы в качестве раздаточного материала на обобщающих уроках, на уроках подготовки к контрольной работе, при проведении работы над ошибками и т. д.

Практически в каждом сценарии урока присутствуют задачи на готовых чертежах. Наличие уже готовых рисунков поможет учителю наиболее рационально использовать рабочее время на уроке. Эти задачи решаются, как правило, устно, но по мере необходимости можно рекомендовать учащимся записать краткое решение задачи.

Тестовые задания позволяют своевременно выявить затруднения учащихся и предупредить устойчивые пробелы в их знаниях, экономя при этом время учителя.

Для закрепления изученного материала рекомендуется использовать рабочие тетради. При этом наиболее подготовленным учащимся можно предлагать для решения только наиболее сложные задачи из рабочих тетрадей, а большую часть времени посвятить решению дополнительных задач повышенной сложности.

Дополнительные задачи предлагаются практически на каждом уроке. Их также можно использовать в качестве заданий на факультативных занятиях по предмету.

Контрольные и самостоятельные работы даны в трех уровнях сложности, что позволяет осуществить дифференцированный контроль. Первый уровень соответствует обязательным программным требованиям; второй – среднему уровню сложности; задания третьего уровня предназначены для учащихся, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в специализированных математических классах. Для каждого уровня приведено два равноценных варианта. Большинство самостоятельных и контрольных работ сопровождаются ответами, указаниями или решениями для более эффективной организации работы над ошибками.

Все содержащиеся в данном пособии поурочные разработки являются примерными и рассчитаны в своем большинстве на классы с высоким уровнем математической подготовки. Количество предлагаемых на урок заданий явно избыточно. В зависимости от степени подготовленности и уровня как класса в целом, так и конкретных учащихся, учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в саму структуру, включая подбор заданий для классной, самостоятельной и домашней работы.

Примерное тематическое планирование по геометрии в 8 классе

Содержание материала	Кол-во уроков
Уроки вводного повторения	**2**
Четырехугольники	**14**
1. Многоугольники	2
2. Параллелограмм и трапеция	6
3. Прямоугольник, ромб, квадрат	5
Контрольная работа № 1	1
Площадь	**14**
1. Площадь многоугольника	2
2. Площадь параллелограмма, треугольника, трапеции	7
3. Теорема Пифагора	4
Контрольная работа № 2	1
Подобные треугольники	**19**
1. Определение подобных треугольников	2
2. Признаки подобия треугольников	5
Контрольная работа № 3	1
3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	6
4. Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника	4
Контрольная работа № 4	1
Окружность	**17**
1. Касательная к окружности	3
2. Центральные и вписанные углы	4
3. Четыре замечательные точки треугольника	3
4. Вписанные и описанные окружности	6
Контрольная работа № 5	1
Повторение	**2**

Уроки вводного повторения

Основная цель этих уроков – подготовить учащихся к изучению курса геометрии в 8 классе. Для этого необходимо повторить наиболее важные темы курса геометрии 7 класса: признаки равенства треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольника, свойства равнобедренного треугольника, свойства прямоугольного треугольника, признаки и свойства параллельных прямых, основные задачи на построение циркулем и линейкой.

При организации уроков повторения необходимо обратить внимание на основные теоретические моменты и на решение наиболее типичных задач из курса геометрии 7 класса. Более подготовленным учащимся при наличии времени можно предложить задачи повышенной сложности. С целью охвата большого объема материала лучше всего предложить учащимся задачи на готовых чертежах, решаемые устно или полуустно. С целью повторения правил оформления решений задач можно предложить к некоторым из них записать подробное решение.

Урок 1
Вводное повторение

Цели урока:

- Повторить наиболее важные темы курса геометрии 7 класса.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

а) Поставить цели и задачи перед учащимися на предстоящий учебный год.

б) Сообщить тему урока и сформулировать цели на данный урок.

II. Самостоятельная теоретическая работа

(Работа выполняется письменно в тетрадях учащихся в одном варианте.)

Используя таблицы 1, 3 (см. приложение, все таблицы раздать на каждую парту), ответить на вопросы:

1. В треугольнике KME $\angle E = \angle K = \angle M$. Напишите все известные вам соотношения между:
   а) сторонами треугольника;
   б) углами треугольника;
   в) сторонами и углами треугольника.
2. Для прямоугольного треугольника PEK напишите все его свойства.
3. Для равнобедренного треугольника MNK с основанием MK напишите все его свойства.
4. Какие элементы треугольника (медианы, высоты, биссектрисы) лежат внутри, а какие вне треугольника?
5. Какие из утверждений верны:
   а) в треугольнике ABC $\angle C$ – прямой, $\angle A = 110°$.
   б) сумма двух углов треугольника равна 69°.
   в) в равнобедренном треугольнике угол при основании равен 95°.
   г) в треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, а внешний угол при вершине C равен 105°.
   д) стороны треугольника равны 5 см, 8 см, 15 см.
   е) медиана треугольника равна его высоте.
   ж) в прямоугольном треугольнике MNK ($\angle K = 90°$) $\angle M = 30°$, $NK = 5$ см, $MN = 9$ см.
   з) в треугольнике PES высоты EE_1 и SS_1 пересекаются в точке H_1, а высоты EE_1 и PP_1 – в точке H_3.
6. *Дано* (см. рис. 1): $m \parallel n$, l – секущая, $\angle 1 = 130°$.
   Найти: $\angle 2 - \angle 8$.
7. В каком случае прямые a и b параллельны (рис. 2):
   а) $\angle 1 = 88°$, $\angle 6 = 92°$ б) $\angle 2 = 103°$, $\angle 3 = 77°$
   в) $\angle 3 = 75°$, $\angle 5 = 105°$ г) $\angle 8 = 110°$, $\angle 4 = 110°$
   д) $\angle 7 = 81°$, $\angle 3 = 89°$ е) $\angle 4 = 95°$, $\angle 5 = 95°$?
8. Можно ли доказать аксиому параллельности прямых?

Обсуждение ответов самостоятельной теоретической работы

2–3 ученика называют свой ответ на первый вопрос, а затем идет обсуждение правильности полученных ответов.

1. См. рис. 3.
   а) $KM < ME + KE$; $ME < KM + KE$; $KE < MK + ME$.
   б) $\angle K + \angle M + \angle E = 180°$.
   в) если $\angle E < \angle K < \angle M$, тогда $KM < ME < KE$.

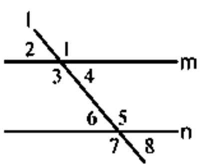


Рис. 1

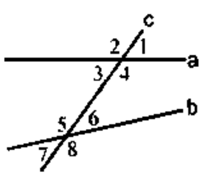


Рис. 2

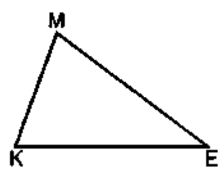


Рис. 3

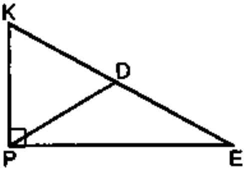


Рис. 4

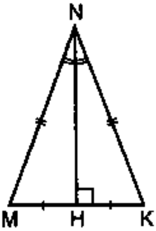


Рис. 5

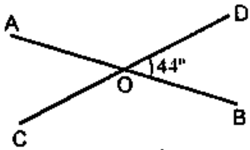


Рис. 6

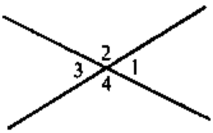


Рис. 7

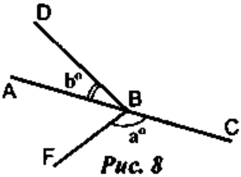


Рис. 8

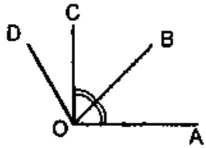


Рис. 9

2. См. рис. 4.
   Если $\angle P = 90°$, то $\angle E + \angle K = 90°$.
   Если $\angle E = 30°$, то $PK = KE/2$.
   Если PD – медиана, то $PD = KD = DE$.
3. См. рис. 5.
   $MN = NK$, $\angle M = \angle K$.
   NH – высота, биссектриса, медиана.
4. Внутри треугольника лежат медианы и биссектрисы всех треугольников и высоты остроугольных треугольников.
   Две высоты тупоугольных треугольников лежат вне треугольника, а две высоты прямоугольного треугольника совпадают с его катетами.
5. Верны утверждения б), г).
6. $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 50°$; $\angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 130°$.
7. Прямые a и b параллельны в случаях в), г), е).
8. Аксиома – основное положение геометрии, которое принимается в качестве исходного, т. е. принимается без доказательства.

III. Решение задач на готовых чертежах

Задачи решаются учащимися самостоятельно. В тетрадях по необходимости выполнить рисунок и внести туда результаты промежуточных вычислений. К простым задачам записать только ответы.

1. Рис. 6. *Найти*: $\angle AOC$, $\angle AOD$.
2. Рис. 7. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 238°$.
   Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.
3. Рис. 8. *Найти*: $\angle DBC$, $\angle ABF$, $\angle DBF$.
4. Рис. 9. $\angle AOD = 120°$, $CO \perp AO$.
   Найти: $\angle BOD$.

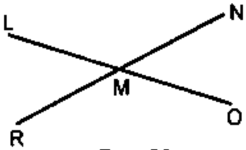


Рис. 10

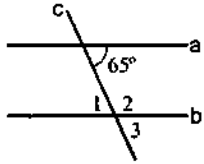


Рис. 11

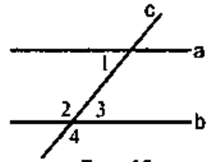


Рис. 12

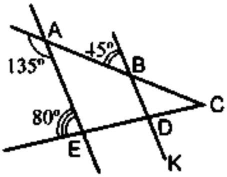


Рис. 13

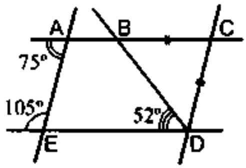


Рис. 14

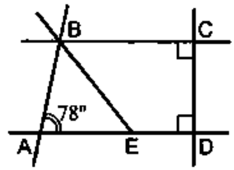


Рис. 15

5. Рис. 10. $\angle NMO : \angle LMN = 2 : 7$.
Найти: $\angle LMR$, $\angle RMO$.

6. Рис. 11. $a \parallel b$.
Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

7. Рис. 12. $\angle 2 - \angle 1 = 80°$, $a \parallel b$.
Найти: $\angle 3$, $\angle 4$.

8. Рис. 13.
Найти: $\angle BDE$, $\angle BDC$, $\angle EDK$.

9. Рис. 14.
Найти: $\angle BCD$.

10. Рис. 15. BE – биссектриса $\angle ABC$.
Найти: $\angle BED$.

11. Рис. 16. $AD \parallel BE$; AC и BC – биссектрисы $\angle BAD$ и $\angle ABE$.
Найти: $\angle ACB$.

12. Рис. 17. AC – биссектриса $\angle BAE$; $\angle CDE : \angle AED = 7 : 8$.
Найти: $\angle DEF$.

13. Рис. 18. $\angle B$ на 20° больше $\angle C$.
Найти: $\angle B$, $\angle C$.

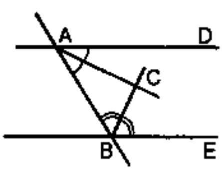


Рис. 16

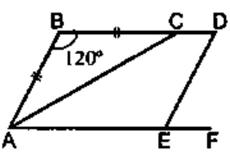


Рис. 17

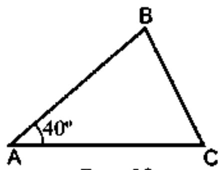


Рис. 18

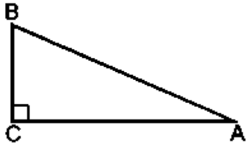


Рис. 19

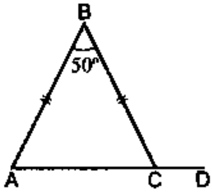


Рис. 20

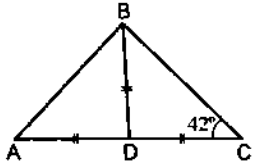


Рис. 21

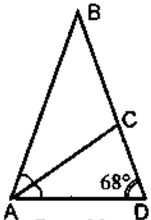


Рис. 22

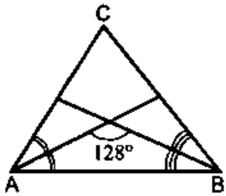


Рис. 23

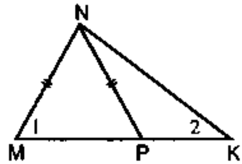


Рис. 24

14. Рис. 19. $\angle A$ в 3 раза меньше $\angle B$.
Найти: $\angle A$, $\angle B$.

15. Рис. 20.
Найти: $\angle BCD$.

16. Рис. 21.
Найти: $\angle ABC$.

17. Рис. 22. $AB = BD$.
Найти: $\angle ACB$.

18. Рис. 23.
Найти: $\angle ACB$.

19. Рис. 24.
Сравнить $\angle 1$ и $\angle 2$.

20. Рис. 25.
Сравнить $\angle ABC$ и $\angle ADC$.

21. Рис. 26.
Найти: $\alpha + \beta + \gamma$

22. Рис. 27. *Найти*: $\angle C$.

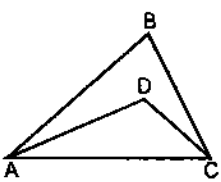


Рис. 25

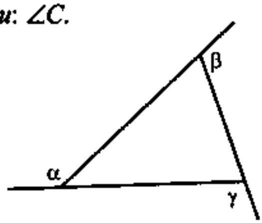


Рис. 26

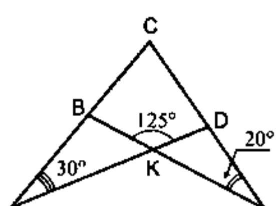


Рис. 27

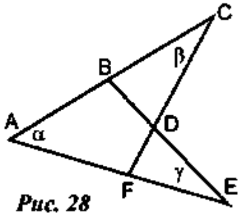


Рис. 28

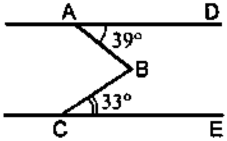


Рис. 29

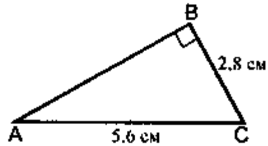


Рис. 30

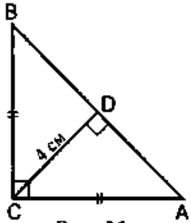


Рис. 31

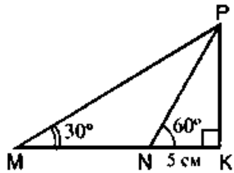


Рис. 32

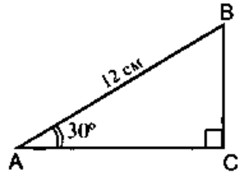


Рис. 33

23. Рис. 28.
Найти: $\angle CDE$.

24. Рис. 29. $AD \parallel CE$.
Найти: $\angle ABC$.

25. Рис. 30.
Найти: $\angle A$, $\angle C$.

26. Рис. 31.
Найти: AB.

27. Рис. 32.
Найти: MK.

28. Рис. 33.
Между какими целыми числами заключена длина отрезка AC?

29. Рис. 34.
Найти: $\angle OPS$.

30. Рис. 35.
Найти: $\angle EDF$.

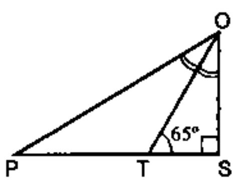


Рис. 34

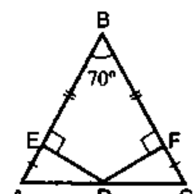


Рис. 35

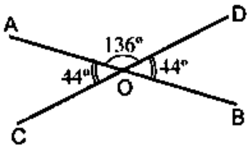


Рис. 36

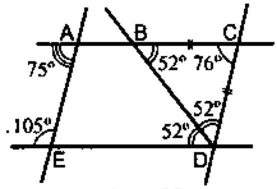


Рис. 37

Предложенное количество задач избыточно. Учитель может, в зависимости от уровня подготовленности учащихся, определить, какие задачи должны решить учащиеся. Например,

I уровень – решить задачи 1–8, 13–17, 25–27.

II уровень – решить задачи 3–5, 7–12, 18–24, 27–30.

Более подготовленным учащимся можно предложить проверить свою работу по заранее подготовленным ответам, у остальных учащихся проверяет учитель в течение всего этапа решения задач, оказывая при этом индивидуальную консультацию по мере необходимости.

Варианты краткого оформления задачи:

Задача № 1

I вариант: $\angle AOC = 44°$, $\angle AOD = 136°$.

II вариант: см. рис. 36.

Задача № 9

Рис. 37. $75° + 105° = 180° \Rightarrow AC \parallel ED$.

Ответы к задачам:

1. $\angle AOC = 44°$, $\angle AOD = 136°$.
2. $\angle 1 = 58°$, $\angle 2 = 122°$, $\angle 3 = 58°$.
3. $\angle DBC = 180° - b°$, $\angle ABF = 180° - a°$, $\angle DBF = 180° - a° + b°$.
4. $\angle BOD = 75°$.
5. $\angle LMR = 40°$, $\angle RMO = 140°$.
6. $\angle 1 = 65°$, $\angle 2 = 115°$, $\angle 3 = 65°$.
7. $\angle 3 = 50°$, $\angle 4 = 130°$.
8. $\angle BDE = 80°$, $\angle BDC = 100°$, $\angle EDK = 100°$.
9. $\angle BCD = 76°$.
10. $\angle BED = 129°$.
11. $\angle ACB = 90°$.
12. $\angle DEF = 84°$.
13. $\angle B = 80°$, $\angle C = 60°$.
14. $\angle A = 22°30'$, $\angle B = 67°30'$.
15. $\angle BCD = 115°$.
16. $\angle ABC = 90°$.
17. $\angle ACB = 102°$.
18. $\angle ABC = 76°$.
19. $\angle 1 > \angle 2$.
20. $\angle ABC < \angle ADC$.
21. $\alpha + \beta + \gamma = 360°$.
22. $\angle C = 75°$.
23. $\angle CDE = \alpha + \beta + \gamma$.
24. $\angle ABC = 72°$.
25. $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$.
26. $AB = 8$ см.
27. $MK = 15$ см.
28. $6 < AC < 12$.
29. $\angle OPS = 40°$.
30. $\angle EDF = 110°$.

IV. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся, наиболее успешно справившихся с решением задач (оценки «2» и «3» на данном уроке не ставить).

Домашнее задание

Повторить признаки равенства треугольников (глава II, §§ 1, 3), признаки равенства прямоугольных треугольников (п. 35), задачи на построение (пп. 22, 23, 38);

Записать решения задач: *I уровень* – № 4, 8, 17, 27; *II уровень* – № 10, 18, 19, 23.

Урок 2
Вводное повторение

Цели урока:

- Повторить признаки равенства треугольников, признаки равенства прямоугольных треугольников, задачи на построение.
- Совершенствовать навыки решения задач на доказательство, на построение циркулем и линейкой.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели.

II. Актуализация знаний учащихся

Повторение простейших задач на построение

Четверо учащихся готовят у доски решение задач на построение:

1. На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному, и построить середину этого отрезка.
2. Отложить от данного луча угол, равный данному, и построить его биссектрису.
3. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к прямой, на которой лежит данная точка.
4. Построить прямую, проходящую через данную точку, не лежащую на данной прямой, перпендикулярно этой прямой.

Самостоятельная теоретическая работа

(Подготовка учащихся у доски и самостоятельная работа выполняются параллельно.)

Используя таблицу 2 (см. Приложение), выполните задания:

1. $\Delta ABC = \Delta MNK$, $AB = 7{,}3$ см, $BC = 2{,}6$ см, $MK = 5{,}4$ см.
$\angle B = 45°$, $\angle M = 35°$, $\angle K = 100°$.

Найдите неизвестные стороны и углы треугольников.

Выберете правильное утверждение:

2. Рис. 38. Для доказательства равенства треугольников POS и QRT достаточно доказать, что:

а) $\angle P = \angle Q$; б) $\angle O = \angle R$; в) $\angle P = \angle T$.

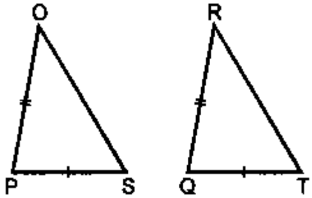


Рис. 38

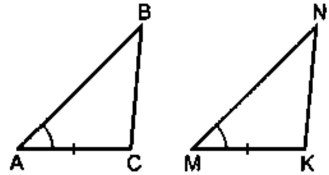


Рис. 39

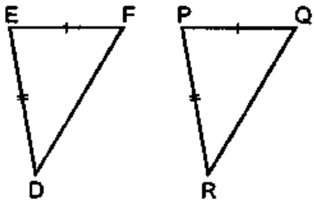


Рис. 40

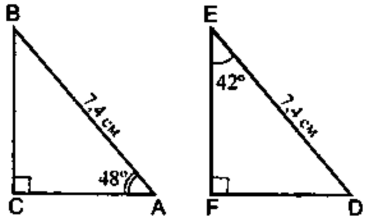


Рис. 41

3. Рис. 39. $\Delta ABC = \Delta MNK$, если:
а) $BC = NK$; б) $\angle B = \angle N$; в) $\angle C = \angle K$,

4. Рис. 40. $\Delta DEF = \Delta RPQ$, если:
а) $\angle F = \angle Q$; б) $DF = RQ$; в) $\angle D = \angle R$.

5. Рис. 41.
Равны ли ΔABC и ΔDEF?

6. В ΔMNK и ΔRQS $\angle N = \angle Q = 90°$, $MN = RQ = 4$ см, $NK = QS = 3$ см. Равны ли ΔMNK и ΔRQS?

7. Рис. 42.
Для доказательства равенства ΔABC и ΔMNK достаточно доказать, что:
а) $\angle A = \angle M$;
б) $\angle C = \angle N$;
в) нет правильного ответа.

8. Рис. 43. Равны ли ΔRPQ и ΔDEF?

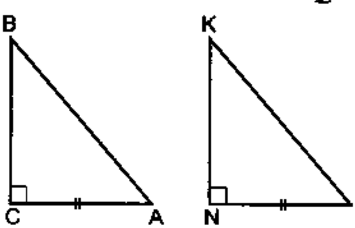


Рис. 42

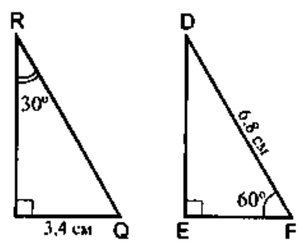


Рис. 43

Проверка ответов теоретической самостоятельной работы

Учащиеся обмениваются тетрадями и проверяют работу своего соседа по парте. Верные ответы называет учитель или проверка осуществляется по ответам, заранее подготовленным на переносной доске.

Верные ответы:

1. $MN = 7{,}3$ см, $NK = 2{,}6$ см, $AC = 5{,}4$ см, $\angle N = 45°$, $\angle A = 35°$, $\angle C = 100°$.
2. а) $\angle P = \angle Q$ – I признак равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).
3. в) $\angle C = \angle K$ – II признак равенства треугольников (по стороне и прилежащим к ней углам).
4. б) $DF = RQ$ – III признак равенства треугольников (по трем сторонам).
5. $\Delta ABC = \Delta DEF$ по гипотенузе и острому углу.
6. $\Delta MNK = \Delta RQS$ по двум катетам.
7. а) $\angle A = \angle M$ ($\Delta\ ABC = \Delta\ MNK$ по катету и прилежащему к нему острому углу).
8. $\Delta RPQ = \Delta DEF$ по гипотенузе и катету, или по гипотенузе и острому углу, или по катету и прилежащему к нему острому углу.

Ответы учащихся, работавших у доски

Заслушать учащихся о решении простейших задач на построение.

Устная фронтальная работа с классом

Составить план решения задачи на построение треугольника по трем элементам.

На доске заранее заготовить чертежи к данным задачам:

1. Рис. 44.

Построить треугольник по двум сторонам, равным MN и PQ, и углу между ними (hk).

– Всегда ли задача имеет решение?

2. Рис. 45.

Построить треугольник по стороне, равной AB, и прилежащим к ней углам, равным (hk) и (mn).

– Всегда ли задача имеет решение?

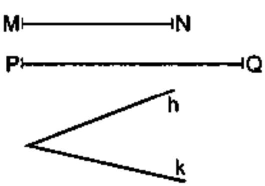


Рис. 44

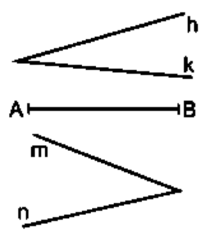


Рис. 45

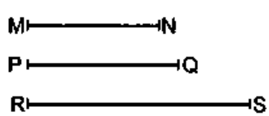


Рис. 46

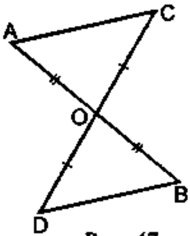


Рис. 47

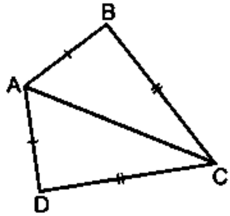


Рис. 48

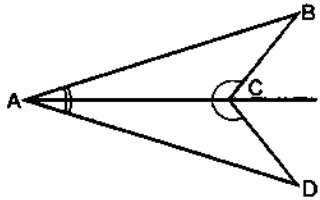


Рис. 49

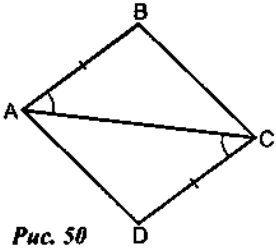


Рис. 50

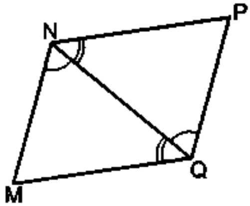


Рис. 51

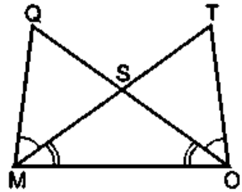


Рис. 52

3. Рис. 46.

Построить треугольник по трем сторонам, равным MN, PQ и RS.

– Всегда ли задача имеет решение?

III. Решение задач

Задачи решаются самостоятельно. Наиболее подготовленные учащиеся работают индивидуально, остальные учащиеся в парах (во избежание списывания пары составить так, чтобы уровень подготовленности был примерно одинаковым).

Задание:

Укажите равные треугольники, изображенные на рисунке; запишите признак равенства треугольников, с помощью которого доказывается их равенство, с указанием пар равных элементов.

1. Рис. 47. **2.** Рис. 48.

3. Рис. 49. **4.** Рис. 50.

5. Рис. 51. **6.** Рис. 52.

7. Рис. 53. $DE = QE$. **8.** Рис. 54.

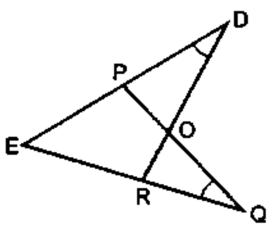


Рис. 53

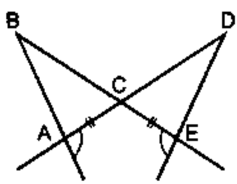


Рис. 54

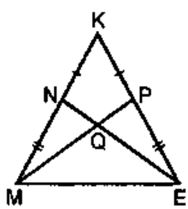


Рис. 55

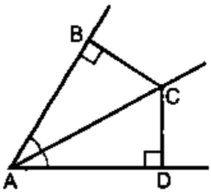


Рис. 56

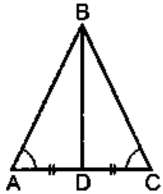


Рис. 57

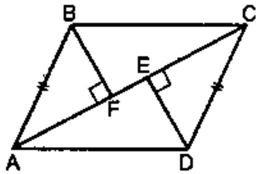


Рис. 58

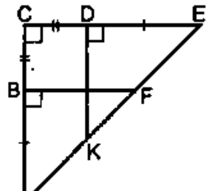


Рис. 59

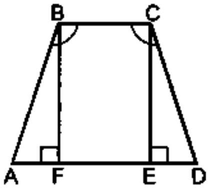


Рис. 60

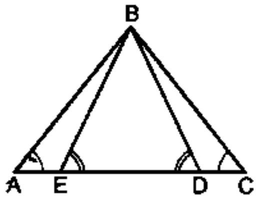


Рис. 61

9. Рис. 55.

10. Рис. 56.

11. Рис. 57.

12. Рис. 58. $AB \parallel CD$.

13. Рис. 59.

14. Рис. 60. $BC \parallel AD$.

15. Рис. 61.

IV. Подведение итогов урока

Собрать тетради учащихся для проверки решения задач 1–15.

Домашнее задание

Решить задачи:

I уровень

1. Один из углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите другие углы.
2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD, причем $AD = DC$, угол C равен 20°. Найдите углы треугольников ABC и ADC.
3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 60 см. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.
4. В треугольнике высота BH делит сторону AM пополам и равна 5 см; периметр треугольника ABH равен 15 см. Найдите периметр треугольника ABM.

II уровень

1. Биссектрисы прямого угла и одного из острых углов треугольника образуют угол 105°. Найдите гипотенузу треугольника, если его меньший катет равен 2 см.

2. В треугольнике ABC проведены биссектриса AK угла BAC и биссектриса KM угла AKB, угол A равен 60°, угол C равен 50°. Найдите углы треугольника BMK.
3. В треугольнике ABC $AB : BC = 2 : 3$, BH – высота, $\angle C = 30°$. Найдите $AB + BC$, если $BH = 6$ см.
4. Даны две параллельные прямые m и b и секущая k. Биссектриса одного из внутренних углов, образованных прямыми k и m, составляет с прямой m угол в 94°. Найдите все углы, образованные прямыми m и b и секущей k.

Четырехугольники

В данной главе рассматриваются наиболее часто встречающиеся виды четырехугольников – параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат, трапеция; даются понятия многоугольника и выпуклого многоугольника, осевой и центральной симметрии.

Основная цель уроков – дать учащимся систематические сведения о четырехугольниках и их свойствах; сформировать представления о фигурах, симметричных относительно точки или прямой.

При изучении курса математики 1–6 классов учащиеся уже были знакомы со многими видами четырехугольников и знают некоторые их свойства, в связи с этим учителю необходимо опираться на уже имеющиеся знания. Доказательства большинства теорем данного раздела проводятся с опорой на признаки равенства треугольников, которые используются и при решении задач в совокупности с применением новых теоретических факторов. Ряд теоретических положений формулируется и доказывается в ходе решения задач. Эти положения не являются обязательными для изучения, однако вполне допустимы ссылки на них при решении задач.

Изучение фигур, симметричных относительно точки или прямой, носит пропедевтический характер, решение сложных задач по этой теме не предусматривается.

В этой главе продолжается рещение задач на построение с помощью циркуля и линейки, при этом для решения многих из них построение практически невозможно без анализа, доказательства и исследования.

Урок 3
Многоугольники

Цели урока:

- Ввести понятие многоугольника, выпуклого многоугольника и рассмотреть четырехугольник как частный вид многоугольника.
- Вывести формулу суммы углов выпуклого многоугольника и суммы углов четырехугольника.
- Научить учащихся решать задачи по теме урока.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

По готовым указаниям и ответам к домашним задачам исправить карандашом все свои ошибки, допущенные при решении задач, и сдать тетради на проверку учителю.

Ответы и указания к домашним задачам

(Ответы и указания подготовить на доске или раздать на каждую парту в распечатанном виде.)

I уровень

1. Рис. 62. $\angle A = \angle C = 40°$.
2. Рис. 63. $AD = DC$, тогда $\angle 1 = \angle C = 20°$.
   $\angle BAC = 40°$, $\angle ABC = 120°$, $\angle ACB = 20°$.
   $\angle DAC = \angle ACD = 20°$, $\angle ADC = 140°$.
3. Рис. 64. В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине. $CM = 30$ см.
4. Рис. 65. $\Delta ABH = \Delta MBH$ по двум катетам, тогда $AB = MB$.
   $P_{ABH} = 15$ см, тогда $AB + AH = 10$ см, значит $P_{ABM} = 20$ см.

II уровень

1. Рис. 66. CB – меньший катет ($\angle A < \angle B < \angle C$).
   $CB = 2$ см, тогда $AB = 4$ см.
2. Рис. 67. $\angle B = 70°$. $\angle 1 = \angle 2 = (180° - (70° + 30°)) : 2 = 40°$.
   $\angle BMK = 180° - (70° + 40°) = 70°$
3. Рис. 68. $BC = 12$ см.
   $AB : BC = 2 : 3$, тогда $AB = 2x$, $BC = 3x$.
   $3x = 12$, $x = 4$ см, значит $AB + BC = 5x = 20$ см.
4. Рис. 69. $\angle CBD = 94°$, тогда $\angle ABD = 86°$, $\angle DBE = 86°$, $\angle CBE = 8°$.
   Ответ: $\angle ABQ = \angle FEK = \angle CBE = \angle BED = 8°$,
   $\angle ABE = \angle BEF = \angle DEK = \angle QBC = 172°$.

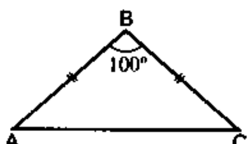


Рис. 62

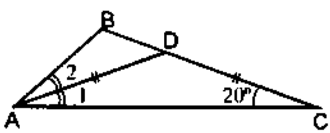


Рис. 63

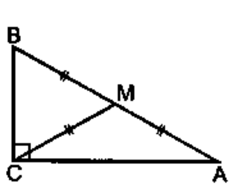


Рис. 64

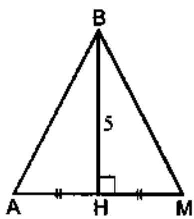


Рис. 65

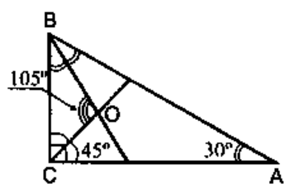


Рис. 66

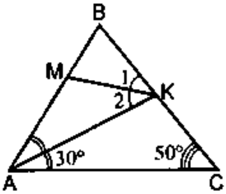


Рис. 67

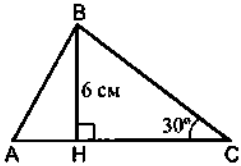


Рис. 68

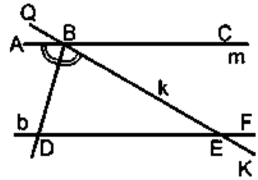


Рис. 69

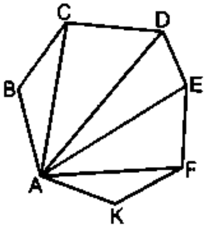


Рис. 70

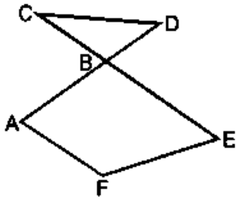


Рис. 71

Рис. 72

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие многоугольника, его сторон, вершин, диагоналей.

На доске и в тетрадях учащихся сделать краткую запись и выполнить рисунки.

а) Рис. 70. *ABCDEKF* – многоугольник (семиугольник), *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FK*, *KA* – стороны многоугольника, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *K* – вершины многоугольника, *A*, *B* – соседние вершины, *AC*, *AD*, *AE*, *AF* – диагонали многоугольника.

б) Рис. 71. *ABCDEF* – не многоугольник ($CE \cap AD = B$).

2. Ввести понятие внутренней и внешней областей многоугольника (рис. 72).

3. Ввести определение выпуклого многоугольника.

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Выпуклые многоугольники: рис. 73.

Невыпуклый многоугольник: рис. 74.

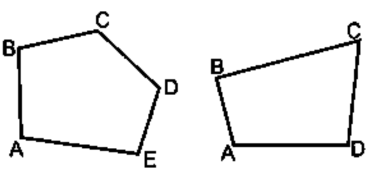


Рис. 73

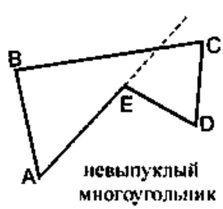


Рис. 74

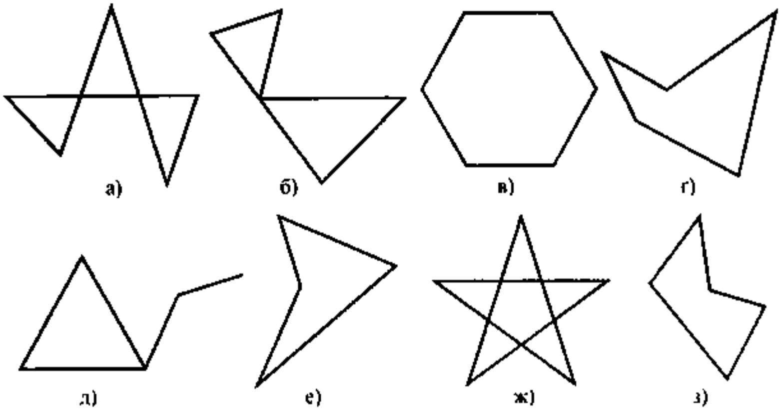


Рис. 75

Фронтальная работа с классом

1. Среди всех фигур, изображенных на рис. 75, укажите те, которые являются:
   а) многоугольниками;
   б) выпуклыми многоугольниками;
   в) невыпуклыми многоугольниками.
2. Начертите:
   I вариант – выпуклый пятиугольник *ABCDE*.
   II вариант – выпуклый шестиугольник *ABCDEF*.

(У доски работают два ученика.)
   Запишите в тетрадях:
   а) вершины многоугольника;
   б) стороны многоугольника;
   в) диагонали многоугольника;
   г) вычислите сумму углов многоугольника.

Обсудить решение задачи 2 (г):

– Сумму углов какой геометрической фигуры мы умеем вычислять?
– Чему равна сумма углов прямоугольника?
– Чему равна сумма углов выпуклого четырехугольника?
– Найдите сумму углов своей фигуры.

3. Чему равна сумма углов десятиугольника?

4. Чему равна сумма углов *n*-угольника? (Работа в группах.)

Учащиеся работают самостоятельно в группах по 3–4 ученика в течение 3–5 минут, затем заслушиваются 2–3 решения и обсуждается их правильность.

Наводящие вопросы (на случай, если никто из учащихся не справился с решением задачи):

– Сколько треугольников получится, если провести все диагонали, выходящие из одной вершины?
– Чему равна сумма углов каждого из полученных треугольников?
– Что вы можете сказать о сумме углов всех треугольников?
– Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях. (Один из учащихся вслух читает задачу и ее решение, заполняя пропуски, остальные внимательно следят за его работой. Если ученик допускает при этом ошибку, то класс исправляет ее.)
   Задача № 3. *Ответ*: а) 5; б) 900°.
   Задача № 4. *Ответ*: а) 1620°; б) 3600°.
2. Решить письменно № 365 (в).

Один из учащихся вызывается к доске для решения задачи, остальные работают в тетрадях.

Решение: сумма углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$.
Следовательно, $180° \cdot (n-2) = 120° \cdot n$.
Отсюда $180° \cdot n - 360° = 120° \cdot n$, $60° \cdot n = 360°$, $n = 6$.

Ответ: 6 сторон.

Наводящие вопросы:

– Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника?
– Как другим способом можно вычислить сумму углов выпуклого n-угольника, если каждый из его n углов равен 120°?
– Как найти число сторон такого многоугольника?

3. Решить самостоятельно № 364 (в).

V. Подведение итогов урока

Выставить оценки учащимся, работавшим у доски и учащимся, активно работавшим в течение всего урока.

Домашнее задание

Пп. 39–41, вопросы 1–5;
Решить задачи № 364 (а, б), 365 (а, б, г), 368.
Решить задачи № 1, 2 из рабочей тетради.

Дополнительная задача: В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ вершина E соединена равными диагоналями с двумя другими вершинами. Известно, что $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = \angle BDC$. Докажите, что периметры четырехугольника $ABDE$ и $BEDC$ равны.

Урок 4
Многоугольники. Решение задач

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по теме «Многоугольники».
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Опрос проводится устно – учащиеся вызываются к доске по одному. Каждый выполняет одно задание. Класс внимательно слушает отвечающего, а затем дополняет, высказывает замечания, исправляет по необходимости его ответ.

1. Начертить две фигуры, одна из которых является многоугольником, а другая – нет. Указать вершины, стороны данного многоугольника.
2. Начертить выпуклый и невыпуклый четырехугольники. У выпуклого четырехугольника указать противоположные вершины и противоположные стороны. Отметить по две точки, принадлежащие внутренней и внешней области невыпуклого четырехугольника.
3. Начертить выпуклый пятиугольник и указать все его диагонали.
4. Что такое периметр многоугольника?
5. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника? 4-угольника? Каков план доказательства теоремы о сумме углов выпуклого n-угольника?
6. Как найти угол выпуклого n-угольника, если известно, что все его углы равны?

Индивидуальная работа по карточкам

3–6 учащихся получают карточки разного уровня сложности и работают самостоятельно во время теоретического опроса.

I уровень (карточка № 1)

1. Найдите сумму углов выпуклого восьмиугольника.
2. В четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны параллельны, $AB = 10$ см, $BC = 14$ см. Найдите периметр $ABCD$.

II уровень (карточка № 2)

1. Сколько сторон имеет выпуклый n-угольник, если сумма его улов равна 540°?
2. В выпуклом четырехугольнике длины сторон относятся как $7 : 8 : 9 : 10$, а его периметр равен 68 см. Найдите стороны четырехугольника.

III уровень (карточка № 3)

1. Найдите число сторон выпуклого многоугольника, если каждый угол равен 108°.
2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ имеет две пары равных между собой смежных сторон: $AB = AD$, $BC = CD$, O – точка

пересечения диагоналей четырехугольника. Сравните периметры пятиугольников $ABCOD$ и $ABOCD$.

Проверка решения дополнительной домашней задачи

Предложить одному из учащихся, справившихся с решением задачи, записать решение на доске. Заслушать решение задачи.

Решение (см. рис. 76):

$\Delta ABE = \Delta CBD$ по двум сторонам и углу между ними ($BE = BD$, $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = BDC$), следовательно, $AB = BC$, $AE = CD$.

$P_{ABDE} = AB + BD + DE + AE$,

$P_{BEDC} = BE + ED + DC + BC$.

Так как $AB = BC$, $BD = BE$, DE – общая сторона, $AE = DC$, то $P_{ABDE} = P_{BEDC}$.

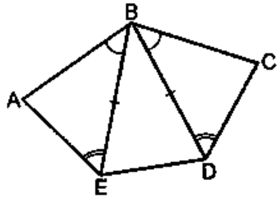


Рис. 76

III. Решение задач

1. Работа в рабочей тетради. Задачи учащиеся решают самостоятельно, затем один из учащихся читает свое решение, остальные проверяют свое решение, исправляют ошибки отвечающего.

Задача № 5. *Ответ*: а) $n = 8$; б) $n = 12$.

Задача № 6. *Ответ*: $BC = 3$ см.

2. Решить письменно № 367 на доске и в тетрадях учащихся. Одного из учащихся вызвать к доске.

Пусть первая сторона равна x см (рис. 77), тогда вторая сторона равна $(x - 8)$ см, третья сторона – $(x + 8)$ см, а четвертая – $(3 \cdot (x - 8))$ см. Периметр – это сумма длин всех сторон, поэтому:

$x + (x - 8) + (x + 8) + 3 \cdot (x - 8) = 66$.

$x = 15$.

$x - 8 = 7$ (см); $x + 8 = 23$ (см);

$3 \cdot (x - 8) = 21$ (см).

Ответ: 15 см, 7 см, 23 см, 21 см.

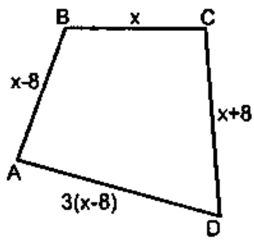


Рис. 77

3. Решить устно с менее подготовленными учащимися:

а) Найдите сумму углов выпуклого 7-угольника. (900°)

б) Найдите угол выпуклого 5-угольника, если известно, что все его углы равны. (108°)

в) Найдите число сторон выпуклого n-угольника, если известно, что сумма его углов равна 1080°.

4. Решить самостоятельно с последующим обсуждением. (Эти задачи решают более подготовленные учащиеся, обсуждение проводится индивидуально во время самостоятельной работы.)

а) Докажите, что выпуклый четырехугольник с неравными углами должен иметь хотя бы один тупой угол.

Решение: Если в четырехугольнике все его углы равны, то каждый из них равен 90°. Если его углы не равны и при этом ни один из них не тупой, то сумма углов выпуклого четырехугольника меньше 360°, что приводит к противоречию с теоремой о сумме углов выпуклого многоугольника. Следовательно, хотя бы один угол должен быть тупым.

б) В выпуклом многоугольнике имеется пять углов с градусной мерой 140° каждый, остальные углы острые. Найдите число сторон этого многоугольника. (*Ответ*: $n = 6$.)

IV. Самостоятельная работа обучающего характера

I уровень

I вариант

1. Найдите сумму углов выпуклого двенадцатиугольника.
2. В выпуклом пятиугольнике две стороны равны, третья сторона на 3 см больше, а четвертая в 2 раза больше первой стороны, пятая – на 4 см меньше четвертой. Найдите стороны пятиугольника, если известно, что его периметр равен 34 см.

II вариант

1. Найдите сумму углов выпуклого тринадцатиугольника.
2. В выпуклом шестиугольнике три стороны равны, четвертая в 2 раза больше первой стороны, пятая – на 3 см меньше четвертой, а шестая – на 1 см больше второй. Найдите стороны шестиугольника, если известно, что его периметр равен 30 см.

II уровень

I вариант

1. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна 2160°?
2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ имеет две пары равных между собой смежных сторон: $AB = AD$, $BC = CD$, O – точка пересечения диагоналей четырехугольника. Сравните периметры пятиугольников $ABCOD$ и $ABOCD$.

II вариант

1. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его углов равна 2520°?
2. Диагональ AC невыпуклого четырехугольника $ABCD$ разделяет этот четырехугольник на два треугольника, причем $AB > BC$, $AB = AD$, $DC = CD$, а прямые, содержащие диагонали четырехугольника, пересекаются в точке O. Сравните периметры пятиугольников $BCODA$ и $DCOBA$.

III уровень

I вариант

1. Каждый угол выпуклого многоугольника равен 162°. Найдите число сторон этого многоугольника.

2. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны. Большая диагональ, проведенная из вершины A, параллельна стороне BC, $\angle BAD = \angle CDA$. Сравните периметры пятиугольников $ABDEF$ и $ACDEF$.

II вариант

1. Каждый угол выпуклого многоугольника равен 165°. Найдите число сторон этого многоугольника.
2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ все стороны имеют равные длины. Диагональ, проведенная из вершины A, параллельна стороне ED, $\angle EAC = \angle DCA$. Сравните периметры четырехугольников $EABC$ и $DCBA$.

V. Работа над ошибками

Найти свои ошибки в решении задач самостоятельной работы, используя готовые ответы и указания, распечатанные для каждого ученика. Менее подготовленные учащиеся проверяют свою работу с помощью учителя.

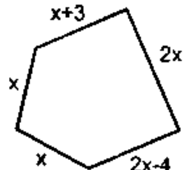


Рис. 78

I уровень

I вариант

1. $180° \cdot (12 - 2) = 1800°$.
2. Рис. 78.
   $x + x + x + 3 + 2x + 2x - 4 = 34$; $x = 5$.
   Ответ: 5 см, 5 см, 8 см, 10 см, 6 см.

II вариант

1. $180° \cdot (13 - 2) = 1980°$.
2. Рис. 79.
   $x + x + x + 2x + 2x - 3 + x + 1 = 30$; $x = 4$.
   Ответ: 4 см, 4 см, 4 см, 8 см, 5 см, 5 см.

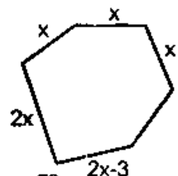


Рис. 79

II уровень

I вариант

1. $180° \cdot (n - 2) = 2160°$.
   Ответ: четырнадцать сторон.
2. См. рис. 80. Докажи, что:
   1) $\Delta ABC = \Delta ADC$;
   2) $\Delta ABO = \Delta ADO$;
   3) $P_{ABCOD} = P_{ABOCD}$.

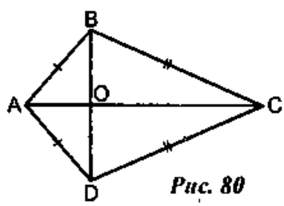


Рис. 80

II вариант

1. $180° \cdot (n - 2) = 2520°$.
   Ответ: шестнадцать сторон
2. См. рис. 81. Докажи, что:
   1) $\Delta ABC = \Delta ADC$;
   2) $\Delta ABO = \Delta ADO$;
   3) $P_{BCODA} = P_{DCOBA}$.

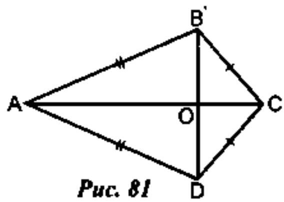


Рис. 81

III уровень

I вариант

1. $180° \cdot (n-2) : n = 162°$.
2. См. рис. 82. Докажи, что:
   1) $\Delta ABD = \Delta DCA$;
   2) $P_{ABDEF} = P_{ACDEF}$.

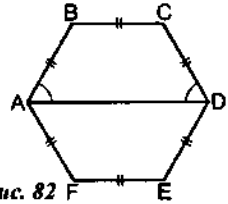


Рис. 82

II вариант

1. $180° \cdot (n-2) : n = 165°$.
2. См. рис. 83. Докажи, что:
   1) $\Delta AEC = \Delta CDA$;
   2) $P_{EABC} = P_{DCBA}$.

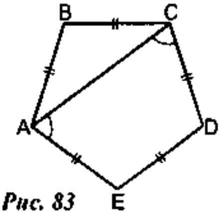


Рис. 83

VI. Подведение итогов урока

Выставить оценки за работу на уроке.

Домашнее задание

Решить задачи № 366, 369, 370;

Решить задачу № 7 из рабочей тетради.

Дополнительная задача: Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника не зависит от числа сторон многоугольника.

Урок 5
Параллелограмм

Цели урока:

- Ввести понятие параллелограмма и рассмотреть его свойства.
- Научить учащихся применять свойства параллелограмма при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Проверить решение домашней задачи № 370 и дополнительной задачи. Решение задач готовят у доски два ученика заранее.

Ответ к задаче № 370: 30°, 60°, 120°, 150°.

Решение дополнительной задачи (рис. 84).

Сумма внутренних углов выпуклого n-угольника равна $180° \cdot (n-2)$.

Сумма внешних углов выпуклого n-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна:

$(180° - \angle A) + (180° - \angle B) + (180° - \angle C) + \ldots =$
$= 180° \cdot n - (\angle A + \angle B + \angle C + \ldots) =$

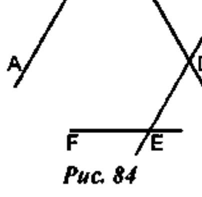


Рис. 84

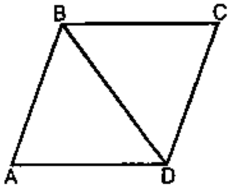


Рис. 85

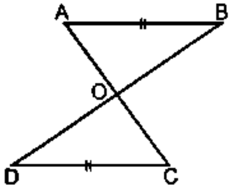


Рис. 86

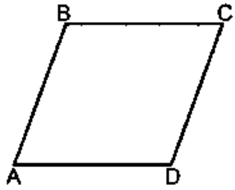


Рис. 87

$= 180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 360°$.

Итак, сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°, то есть не зависит от числа его сторон.

III. Решение задач на готовых чертежах

Работа проводится с целью подготовки к изучению нового материала. Учащимся дается 1–2 минуты на обдумывание задачи, а затем заслушиваются различные варианты решений, обсуждается, какое из решений наиболее верное, рациональное. Таким же образом решается задача б).

1. *Дано*: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ (см. рис. 85).
   Доказать: $BC = AD$, $\angle A = \angle C$.
2. *Дано*: $AB \parallel CD$, $AB = CD$ (см. рис. 86).
   Доказать: O – середина AC и BD.

IV. Изучение нового материала

Ввести понятие параллелограмма. Рисунок (рис. 87) и запись на доске и в тетрадях учащихся:

***ABCD* – параллелограмм. *AB* ∥ *CD*, *BC* ∥ *AD*.**

Отработка определения параллелограмма в процессе решения устных задач по заготовленным чертежам:

1. Рис. 88. *Дано*: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.
   Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.
2. Рис. 89. *Дано*: $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.
   Доказать: $ABCD$ – параллелограмм.
3. Рис. 90. *Дано*: $MN \parallel PQ$, $\angle M = \angle P$.
   Доказать: $MNPQ$ – параллелограмм.

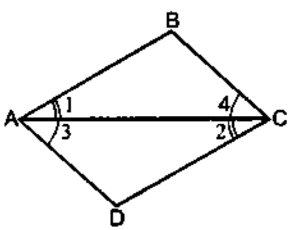


Рис. 88

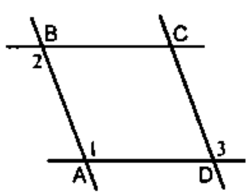


Рис. 89

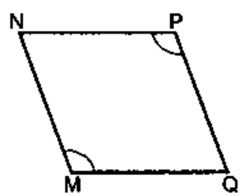


Рис. 90

4. Рис. 91. *Дано*:
а) $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$;
б) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 \neq \angle 4$
Является ли $ABCD$ – параллелограммом?

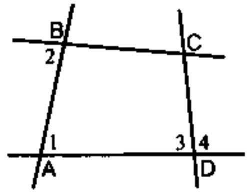


Рис. 91

Изучение свойств параллелограмма

Распределить учащихся в небольшие группы для решения задач творческого характера.

Задача: Рассмотрите противолежащие стороны, углы и диагонали параллелограмма. Сформулируйте и докажите их свойства.

– Что вы можете сказать о противолежащих сторонах и углах параллелограмма?
– Что можно сказать о точке пересечения диагоналей параллелограмма?

Обсуждение свойств параллелограмма с доказательствами

1. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
2. Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.
3. В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

Последнее свойство также может быть выдвинуто учащимися, хотя в учебнике его нет.

Запись свойств параллелограмма в тетрадях и на доске:

1. Рис. 92. $AB = CD$, $AD = BC$.
2. Рис. 93. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.
$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180°$.
3. Рис. 94. $AO = OC$, $BO = OD$.

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях. Учащиеся работают самостоятельно, затем один из учащихся по указанию учителя читает свое решение, остальные внимательно его слушают, после чего вносят свои исправления при наличии ошибок в решении.

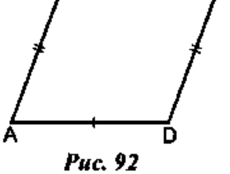


Рис. 92

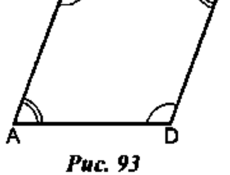


Рис. 93

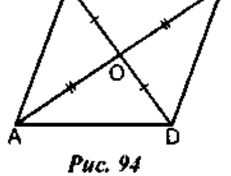


Рис. 94

Задача № 8

а) $AB = CD = 12$ см; $BC = AD = 20$ см;

б) $\angle C = 38°$, $\angle B = \angle D = 142°$.

Задача № 9

Ответ: 6 см.

2. Решить задачу № 376 б) на доске и в тетрадях. Один из учащихся по указанию учителя выходит к доске, остальные работают на местах.

Наводящие вопросы:

– По условию задачи в параллелограмме $ABCD$ $\angle A - \angle B = 55°$. Как вы понимаете это условие?
– Что вы знаете об углах A и B параллелограмма $ABCD$?
– Как найти каждый из углов параллелограмма?

3. Решить самостоятельно задачи № 376 д), 372 а), б), 371 б).

Учитель оказывает индивидуальную помощь менее подготовленным учащимся.

Задача № 376 (д)

Решение (рис. 95):

В треугольнике ACD:

$\angle D = 180° - (\angle A + \angle C) = 127°$.

В параллелограмме $ABCD$:

$\angle B = \angle D = 127°$,

$\angle A = 180° - \angle B = 53°$,

$\angle C = \angle A = 53°$.

Ответ: $\angle A = \angle C = 53°$,

$\angle B = \angle D = 127°$.

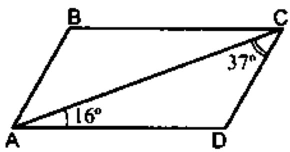


Рис. 95

Наводящие вопросы:

– Как можно найти угол D?
– Что ты знаешь об углах B, A, C данного параллелограмма?

Задача № 372 (а)

Решение (рис. 96):

Пусть $AB = x$ см, тогда $AD = x + 3$ (см).

В параллелограмме $ABCD$:

$AB = CD$, $AD = BC$,

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$. Тогда

$48 = x + (x + 3) + x + (x + 3)$

$4x + 6 = 48$

$x = 10{,}5$

$AB = AC = 10{,}5$ (см), $AD = BC = 13{,}5$ (см).

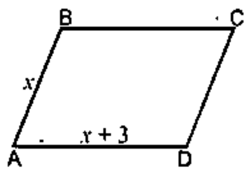


Рис. 96

Ответ: 10,5 см, 13,5 см, 10,5 см, 13,5 см.

Наводящие вопросы:

– Обозначим сторону AB за x. Чему равны другие стороны параллелограмма?
– Почему сторона CD не может быть равной $(x + 3)$ см?

– Какое уравнение можно составить для нахождения неизвестной x с учетом того, что периметр параллелограмма равен 48 см?

Задача № 372 (б)

Решение: Разность двух сторон равна 7 см, значит, одна сторона равна x см, а смежная с ней $(x + 7)$ см, тогда противолежащие им стороны равны x см и $(x + 7)$ см соответственно.

Периметр параллелограмма равен 48 см, следовательно, $x + (x + 7) = 48 \Rightarrow x = 8{,}5$; $x + 7 = 15{,}5$, т. е. стороны параллелограмма равны 8,5 см; 15,5 см; 8,5 см; 15,5 см.

Ответ: 8,5 см; 15,5 см; 8,5 см; 15,5 см.

Наводящие вопросы:

– Как вы понимаете условие «разность двух сторон равна 7 см»?
– Похожа ли эта задача на предыдущую?

Задача № 371 (б)

Решение (рис. 97):

$AB \parallel CD \Rightarrow \angle A + \angle D = 180°$, т. к. $\angle A$ и $\angle D$ – внутренние односторонние углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AD.

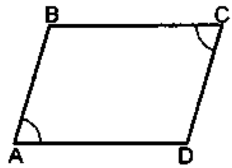


Рис. 97

Так как $\angle A = \angle C$ и $\angle A + \angle D = 180°$, то $\angle C + \angle D = 180°$, следовательно, так как сумма внутренних односторонних углов C и D при прямых AD и BC и секущей CD равна 180°, то прямые AD и BC параллельны.

Наводящие вопросы:

– Какой четырехугольник называется параллелограммом?
– Что еще нужно доказать, чтобы $ABCD$ был параллелограммом?
– Когда прямые BC и AD будут параллельными?
– Равна ли сумма углов C и D 180°?

4. Решение дополнительных задач наиболее подготовленными учащимися.

Дополнительные задачи

1. Из произвольной точки равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной a, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырехугольника.

Решение (см. рис. 98):

Пусть точка X – произвольная точка основания AC равнобедренного треугольника ABC, $AB = BC = a$, $XD \parallel AB$, $XE \parallel BC$.

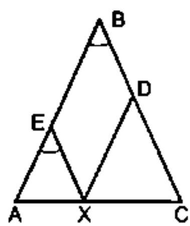


Рис. 98

Т. к. $XE \parallel BC$, $XD \parallel AB$, то $BEXD$ – параллелограмм, $BD = XE$, $BE = DX$.

Т. к. $XD \parallel AB$, то $\angle DBE = \angle XEA$ как соответственные углы при параллельных прямых CB и XE и секущей AB.

В ΔAXE $\angle AXE = 180° - (\angle A + \angle XEA)$.

В ΔABC $\angle C = 180° - (\angle A + \angle DBE)$.

Т. к. $\angle XEA = \angle DBE$, то $\angle C = \angle AXE$. Но $\angle C = \angle A$ как углы при основании равнобедренного треугольника, тогда $\angle A = \angle AXE$ и ΔAEX равнобедренный с основанием AX, а $AE = XE$.

$P_{BEXD} = XE + EB + BD + DX$, но т. к. $XE = BD$, $EB = DX$, $AE = XE$, то $P_{BEXD} = XE + EB + XE + EB = 2(XE + EB) = 2(AE + EB) = 2AB = 2a$.

Ответ: $2a$.

2. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр параллелограмма равен 12, а разность периметров треугольников BOC и COD равна 2. Найдите стороны параллелограмма.

Решение (см. рис. 99):

$P_{BOC} - P_{COD} = (BC + BO + OC) - (CD + CO + OD) = DC - CD = 2$.

($BO = OD$, т. к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам), откуда $BC = CD + 2$.

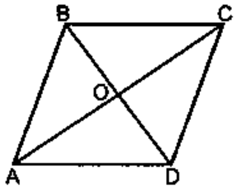


Рис. 99

$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD$.

В параллелограмме противолежащие стороны равны, тогда:

$P_{ABCD} = 2 \cdot (BC + CD) = 2 \cdot (CD + 2 + CD) = 2\,(2 + 2CD) = 12$, откуда $CD = 2$, а $BC = 4$.

Ответ: 2; 4; 2; 4.

VI. Подведение итогов урока

Оценить выборочно работу учащихся в течение урока. Собрать на проверку тетради учащихся, решивших хотя бы одну из дополнительных задач.

Домашнее задание

П. 42, вопросы 6–8;

Решить задачи № 371 а), 372 в), 376 в, г);

Решить задачу № 10 из рабочей тетради (см. рис. 100).

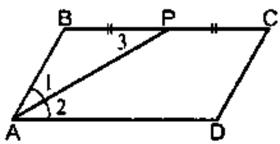


Рис. 100

Дополнительная задача: Сколько углов с градусной мерой меньше 10° может быть в выпуклом многоугольнике?

Урок 6
Признаки параллелограмма

Цели урока:

- Рассмотреть признаки параллелограмма и закрепить полученные знания в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Менее подготовленным учащимся дать задание подготовить у доски свойства параллелограмма с доказательством, выслушать индивидуально каждого отвечающего.

Остальным – доказать самостоятельно дополнительные свойства параллелограмма:

1. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник;
2. Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны или лежат на одной прямой.

После подготовки выслушать доказательства дополнительных свойств параллелограмма.

1. Рис. 101.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AE – биссектриса $\angle BAD$.

Доказать: ΔABE – равнобедренный.

Доказательство: Т. к. $ABCD$ – параллелограмм, значит $BC \parallel AD$, тогда $\angle EAD = \angle BEA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AE. AE – биссектриса $\angle BAD$, значит, $\angle BAE = \angle EAD$, поэтому $\angle BAE = \angle BEA$.

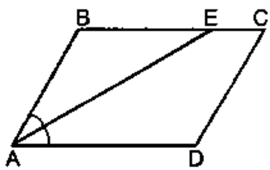


Рис. 101

В ΔABE $\angle BAE = \angle BEA$, значит, ΔABE – равнобедренный с основанием AE.

Наводящие вопросы:

– Сформулируйте признак равнобедренного треугольника.

– Какие углы в ΔBAE могут быть равными? Почему?

2 а). Рис. 102.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, BE – биссектриса $\angle CBA$, AE – биссектриса $\angle BAD$.

Доказать: $BE \perp AE$.

Доказательство: AE – биссектриса, следовательно $\angle 1 = \angle 2$.

BE – биссектриса $\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$.

В параллелограмме сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°, поэтому $\angle ABC + \angle BAD = 180°$, т. е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$.

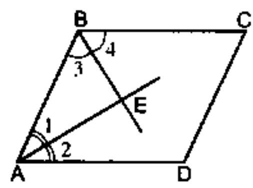


Рис. 102

Т. к. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, то $2 \cdot (\angle 1 + \angle 3) = 180°$, $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. В ΔABE $\angle AEB = 180° - (\angle 1 + \angle 3) = 90°$, т. е. $BE \perp AE$.

2 б). Рис. 103.

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AE, CK – биссектрисы $\angle A$ и $\angle C$.

Доказать: $AE \parallel CK$ или AE и CK совпадают.

Доказательство: Т. к. $ABCD$ – параллелограмм, то $\angle 2 = \angle BEA$, как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AE.

В параллелограмме противолежащие углы равны, следовательно, $\angle BAD = \angle BCD$, значит, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

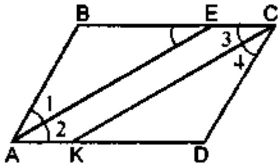


Рис. 103

Так как $\angle 2 = \angle BEA$, $\angle 2 = \angle 3$, то $\angle BEA = \angle 3 \Rightarrow$ прямые AE и CK параллельны, по признаку параллельности прямых. Прямые AE и CK совпадут, если в параллелограмме смежные стороны равны.

Наводящие вопросы:
- Когда прямые AE и CK будут параллельными?
- Равны ли углы BEA и $\angle 3$? Почему?
- В каком случае AE и CK совпадут?

Проверка домашнего задания

Проверить домашнюю задачу № 376 в) и дополнительную домашнюю задачу. Предложить двум учащимся оформить решение на доске в то время, когда идет теоретический опрос.

Решение задачи № 376 (в)

В параллелограмме противолежащие углы равны, т. е. $\angle A = \angle C$.

$\angle A + \angle C = 142° \Rightarrow \angle A = \angle C = 71°$, тогда:

$\angle B + \angle D = 180° - 71° = 109°$.

Ответ: 71°, 109°, 71°, 109°.

Решение дополнительной задачи:

Сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°. Тогда такой многоугольник может иметь не более двух внешних углов с градусной мерой больше 170°. Это означает, что острых углов с градусной мерой меньше 10° может быть не более двух. В качестве примера можно привести треугольник с углами, равными 1°, 2° и 177°.

Индивидуальная работа по карточкам

(3–6 учащихся работают по карточкам во время теоретического опроса.)

I уровень

1. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle B = 126°$.
2. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 36 см, а одна из сторон в два раза больше другой.

II уровень

1. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle A + \angle B + \angle C = 237°$.
2. Периметр параллелограмма равен 40 дм, а две из его сторон относятся как 3 : 2. Найдите стороны параллелограмма.

III уровень

1. Из вершины острого угла M параллелограмма $MNKP$ проведены перпендикуляры ME и MF к прямым NK и KP соответственно. Найдите углы параллелограмма, если $\angle EMF = 150°$.
2. Вне параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали AC и пересекающая продолжения сторон AB, CD, AD и BC соответственно в точках E, F, K и L. Докажите, что $EK = FL$.

Подготовка к изучению нового материала

Фронтальная работа с классом (устно).

– Что означают слова «свойства» и «признак»? Приведите примеры. (В качестве примеров можно привести свойства равнобедренного треугольника и признак равнобедренного треугольника, свойства параллельных прямых.)
– Что такое обратная теорема?
– Всегда ли верно утверждение, обратное данному? Приведите примеры. (*Нет, не всегда. Сумма смежных углов равна 180°. Обратное утверждение «если сумма двух углов равна 180°, то эти углы смежные» неверно.*)

III. Изучение нового материала

– Сформулируйте утверждения, обратные свойствам параллелограмма, и выясните, верны ли они. (Утверждения выслушать, рассмотрение их справедливости распределить по рядам в качестве учебно-исследовательской работы, а затем обсудить результаты работы.)

Запись в тетрадях и на доске:

Признаки параллелограмма

1. Рис. 104.
   Если $AB = CD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ – параллелограмм.
2. Рис. 105.
   Если $AB = CD$ и $BC = AD$, то $ABCD$ – параллелограмм.

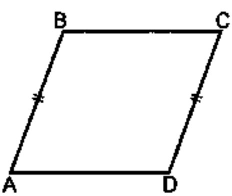


Рис. 104

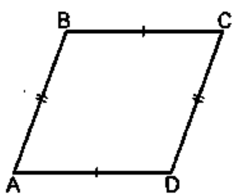


Рис. 105

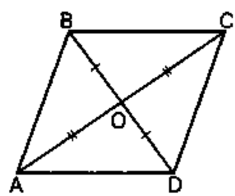


Рис. 106

3. Рис. 106.
Если $AC \cap BD = O$ и $BO = OD$, $AO = OC$, то $ABCD$ – параллелограмм.

IV. Закрепление изученного материала

Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 11, 13. Учащиеся работают самостоятельно, по окончанию работы тетради сдаются на проверку учителю.

Решить письменно на доске и в тетрадях задачу № 379. Один из учащихся по указанию учителя выходит к доске и решает задачу.

Задача № 379

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $BK \perp AC$, $DM \perp AC$ (рис. 107).

Доказать: $BMDK$ – параллелограмм.

Доказательство:

1) $\Delta BKC = \Delta DMA$ по гипотенузе и острому углу ($\angle BCK = \angle DAC$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, $BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, ΔBKC и ΔDMA прямоугольные), значит $MD = BK$.

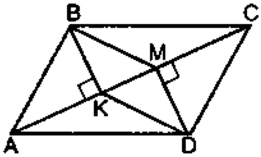


Рис. 107

2) ΔBMK и ΔDKM – прямоугольные, $\Delta BMK = \Delta DKM$ по двум катетам ($MD = BK$, KM – общий катет), значит $BM = DK$.
3) В четырехугольнике $BMDK$ противолежащие стороны равны ($MD = BK$ и $BM = DK$), следовательно, $BMDK$ – параллелограмм.

Наводящие вопросы:

– Когда $BMDK$ будет параллелограммом?
– Можно ли доказать, что $BK = MD$, $BM = KD$?

V. Самостоятельное решение задач

Учитель индивидуально проверяет правильность решения задач, оказывая необходимую помощь.

I уровень – № 382, дополнительные задачи № 1, 2.

II уровень – № 382, дополнительные задачи № 3, 4.

Задача № 1

Точки M и N – середины противоположных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ – параллелограмм.

Дано: $ABDC$ – параллелограмм, M – середина BC, N – середина AD.

Доказать: $AMCN$ – параллелограмм.

Доказательство (рис. 108):

Т. к. M – середина BC, N – середина AD, то $BM = MC$, $AN = ND$. Но $BC = AD$ как противолежащие стороны параллело-

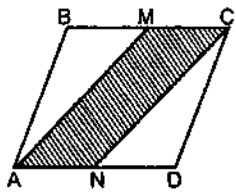


Рис. 108

грамма, тогда $MC = AN$. $BC \parallel AD$ как противолежащие стороны параллелограмма, значит $MC \parallel AN$. В четырехугольнике $AMCN$ противолежащие стороны MC и AN равны и параллельны, следовательно, $AMCN$ – параллелограмм.

Задача № 2

В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM, так, что $AM = MD$. Докажите, что $ABDC$ – параллелограмм.

Дано: ΔABC, AM – медиана, $D \in AM$, $AM = MD$.

Доказать: $ABDC$ – параллелограмм.

Доказательство (рис. 109):

Т. к. AM – медиана ΔABC, то $CM = BM$. По построению $AM = DM$. Получили, что в четырехугольнике $ABDC$ диагонали AD и BC пересекаются в точке M и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, $ABDC$ – параллелограмм.

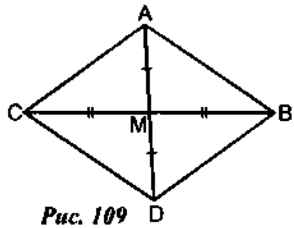


Рис. 109

Задача № 3

Точки K, L, M и N – середины сторон соответственно AB, BC, CD, и AD параллелограмма $ABCD$. Доказать, что четырехугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK – параллелограмм.

Доказательство (см. рис. 110):

1) Из определения параллелограмма следует, что $BC \parallel AD$, поэтому $LC \parallel AN$. Кроме того, $LC = BC/2 = AD/2 = AN$. Значит, противоположные стороны LC и AN четырехугольника $ANCL$ равны и параллельны, следовательно, $ANCL$ – параллелограмм. Поэтому $AL \parallel CN$.

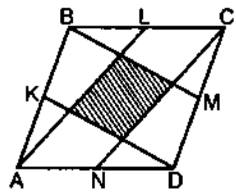


Рис. 110

2) Из определения параллелограмма следует, что $AB \parallel CD$, поэтому $KB \parallel MD$. Кроме того, $KB = AB/2 = CD/2 = MD$. Значит, противоположные стороны KB и MD четырехугольника $KBMD$ равны и параллельны, следовательно, $KBMD$ – параллелограмм. Поэтому $KD \parallel MB$.
3) Т. к. $KD \parallel MB$ и $AL \parallel CN$, то противоположные стороны четырехугольника с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK попарно параллельны. Следовательно, это параллелограмм.

Задача № 4

На сторонах AB, BC, CD, и AD параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ – параллелограмм.

Доказательство (см. рис. 111):

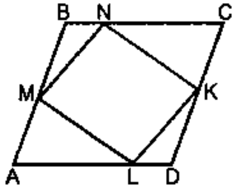


Рис. 111

По условию задачи $AM : MB = BN : NC = CK : KD = DL : AL$. В параллелограмме $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$, тогда $AM = CK$, $BM = KD$, $BN = DL$, $NC = LA$. $\Delta NCK = \Delta LAM$, $\Delta MBN = \Delta KDL$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ как противолежащие углы параллелограмма), тогда $MN = KL$, $NK = ML$, следовательно, в четырехугольнике $MNKL$ противолежащие стороны равны, а это значит, что $MNKL$ – параллелограмм.

VI. Подведение итогов

Выставить оценки за работу на уроке.

Домашнее задание

П. 43, вопрос 9;

Решить задачи № 383, 373, 378 (устно); решить задачу № 12 из рабочей тетради.

Дополнительные задачи:

I уровень

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $\angle B = 70°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle ACD = 50°$. Докажите, что $BC = AD$.

II уровень

Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K, вторая – стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырехугольник $MNKL$ – параллелограмм.

Урок 7
Решение задач по теме «Параллелограмм»

Цели урока:

- Закрепить знания о свойствах и признаках параллелограмма в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Работа у доски, работа по индивидуальным карточкам и проверка домашнего задания проводятся одновременно.

Работа у доски

Подготовить у доски доказательства признаков параллелограмма (3 ученика). Учащиеся работают самостоятельно.

Проверка домашнего задания

Проверить решение домашней задачи № 373. Один из учащихся по указанию учителя готовит решение задач на переносной доске.

Решение заслушать после проверки задач по готовым чертежам.

Задача № 373

Решение (рис. 112):

В ΔBCH $\angle H = 90°$, $\angle C = 30° \Rightarrow$
$BC = 2 \cdot HB$, т. е. $BC = 13$ см.
$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$,
$AB = DC$, $BC = DA$ как противолежащие стороны параллелограмма, значит, $2 \cdot AB + 13 \cdot 2 = 50$.
Таким образом, $AB = 12$ (см), тогда $CD = AB = 12$ см, $AD = BC = 13$ см.

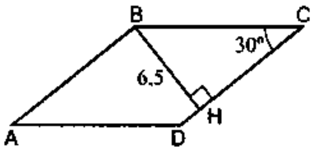


Рис. 112

Ответ: $AB = CD = 12$ см, $AD = BC = 13$ см.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о треугольнике BCH? Можно ли найти другие его стороны?
– Как можно найти стороны параллелограмма, если известно, что периметр параллелограмма равен 50 см.

Работа по индивидуальным карточкам

(3–6 учеников получают задание на карточках и работают самостоятельно.)

I уровень

1. Точки E и K – середины сторон AB и CD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что $AECK$ – параллелограмм.
2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $AC = 2$ дм, $AO = 10$ см, $BD = 1{,}5$ дм, $BO = 7$ см. Выясните, является ли $ABCD$ параллелограммом?

II уровень

1. В параллелограмме $ABCD$ на сторонах AB и CD отмечены соответственно точки M и N так, что $\angle BMC = \angle AND$. Докажите, что $AMCN$ – параллелограмм.
2. Точки A и B делят диагональ MK параллелограмма $MNKP$ на три равные части. Является ли четырехугольник $ANBP$ параллелограммом? Ответ обоснуйте.

III уровень

1. *Дано*: $ABCD$ – параллелограмм, $AM = CK$, $AP = CN$ (рис. 113).
Доказать: $MNKP$ – параллелограмм.

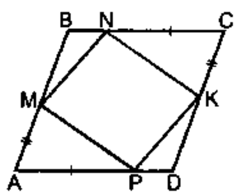


Рис. 113

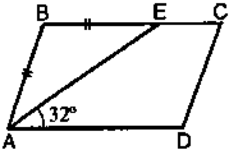


Рис. 114

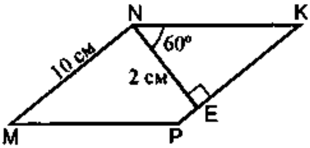


Рис. 115

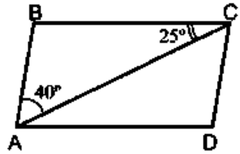


Рис. 116

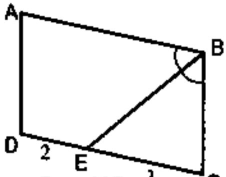


Рис. 117

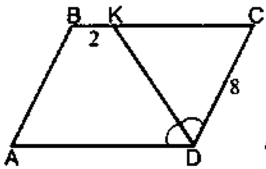


Рис. 118

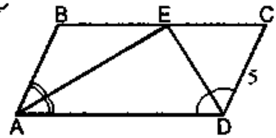


Рис. 119

2. Через точку пересечения диагоналей O параллелограмма $ABCD$ проведена прямая MN, пересекающая стороны AD и BC в точках M и N соответственно. Является ли $MBND$ параллелограммом? Ответ обоснуйте.

Решение задач по готовым чертежам

Решение с последующей самопроверкой по готовым ответам. (В это время учитель может заслушать доказательства признаков параллелограмма и проверить решение дополнительных домашних задач индивидуально у тех учащихся, которые их решали.)

1. Рис. 114. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: $\angle C$, $\angle D$.
2. Рис. 115. $MNKP$ – параллелограмм.
   Найти: MP, PK.
3. Рис. 116. *Найти* углы параллелограмма $ABCD$.
4. Рис. 117. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: P_{ABCD}.
5. Рис. 118. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: AD.
6. Рис. 119. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: P_{ABCD}, $\angle AED$.
7. Рис. 120. $NBFD$ – параллелограмм. AD = 4 см, NB = 5 см.
   Найти: BC, CD.

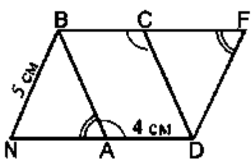


Рис. 120

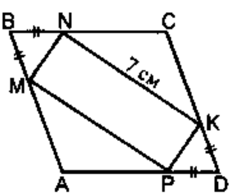


Рис. 121

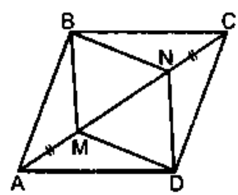


Рис. 122

8. Рис. 121. $ABCD$ – параллелограмм. $P_{MNKP} = 20$ см.
Найти: MN, MP.

9. Рис. 122. $BNDM$ – параллелограмм. $AB : BC = 4 : 5$, $P_{ABCD} = 18$ см.
Найти: AD, DC.

Ответы к задачам на готовых чертежах

1. $\angle C = 64°$, $\angle D = 116°$.
2. $MP = 4$ см, $PK = 10$ см.
3. $\angle B = \angle D = 115°$, $\angle A = \angle C = 65°$.
4. $P_{ABCD} = 16$ см.
5. $AD = 10$ см.
6. $P_{ABCD} = 30$ см, $\angle AED = 90°$.
7. $BC = 4$ см, $CD = 5$ см.
8. $MN = 3$ см, $MP = 7$ см.
9. $AD = 5$ см, $DC = 4$ см.

Проверка решения дополнительных домашних задач

I уровень

См. рис. 123.

$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 60° + 50° = 110°$.

$\angle ABC$ и $\angle BCD$ – односторонние углы при прямых CD и AB и секущей BC.

$\angle ABC + \angle BCD = 70° + 110° = 180°$, значит $CD \parallel AB$.

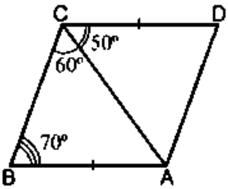


Рис. 123

В четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны AB и CD параллельны и равны, следовательно, $ABCD$ – параллелограмм, а это значит, $BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма.

II уровень

См. рис. 124.

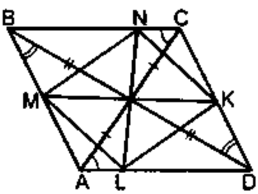


Рис. 124

а) $\Delta AOL = \Delta CON$ по стороне и прилежащим к ней углам ($AO = CO$, т. к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, $\angle AOL = \angle CON$ как вертикальные, $\angle NCO = \angle LAO$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC), тогда $NO = AO$.

б) $\Delta BOM = \Delta DOK$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BO = DO$, т. к. диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, $\angle BOM = \angle DOK$ как вертикальные, $\angle MBO = \angle KDO$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD), тогда $MO = KO$.

в) В четырехугольнике $MNKL$ диагонали MK и NL точкой пересечения делятся пополам ($MO = KO$, $NO = AO$), следовательно, $MNKL$ – параллелограмм.

III. Решение задач

Решите письменно на доске и в тетрадях задач № 374, 377, выполнив рисунок и записав краткое решение.

К доске вызываются два ученика и решают по одной задаче самостоятельно, на местах учащиеся также работают самостоятельно. По окончании работы решения задач с доски проверяют учащиеся, исправляют имеющиеся ошибки, предлагают более рациональные способы решения.

Задача № 374

Решение (рис. 125): ΔABK – равнобедренный, $AB = BK = CD = 15$ см,

$BC = AD = 15 + 9 = 24$ (см),

$P_{ABCD} = (15 + 24) \cdot 2 = 78$ (см).

Ответ: 78 см.

Наводящие вопросы:

- Что вы можете сказать о ΔABK, если AK – биссектриса $\angle BAD$ параллелограмма $ABCD$?
- Чему равны стороны параллелограмма $ABCD$? Его периметр?

Задача № 377

Решение (рис. 126):

В ΔMNH $\angle H = 90°$, $\angle N = 30°$, $MN = 3$ см $\Rightarrow MN = 6$ см.

$MNPQ$ – параллелограмм $\Rightarrow MN = PQ = 6$ см, $NP = MQ = 8$ см.

Ответ: $MN = PQ = 6$ см, $NP = MQ = 8$ см.

Наводящие вопросы:

- Что вы можете сказать о ΔMNH? Какую из его сторон можно найти?
- Найдите стороны параллелограмма $MNPQ$.

IV. Самостоятельная работа

Задания I уровня предлагаются менее подготовленным учащимся, задания III уровня – самым подготовленным, задания II уровня – всем остальным, что составляет большинство класса. Учащихся, выполняющих задания I и III уровня необходимо предупредить о критериях оценивания их работ. Верное решение всех заданий I уровня может быть оценено максимально в 4 балла, для получения оценки «5» решающим задания III уровня необходимо верное решение или решение с негрубыми ошибками третьего задания. Ни в коем случае нельзя навязывать задания I и III уровней, учитель может только рекомендовать их учащимся.

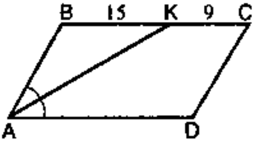


Рис. 125

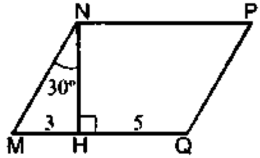


Рис. 126

I уровень

I вариант

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AC = 20$ см, $BD = 10$ см, $AB = 13$ см. Диагонали $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите периметр ΔCOD.
2. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ с острым углом A проведен перпендикуляр BK к прямой AD; $BK = AB : 2$.
   Найдите $\angle C$, $\angle D$.
3. Середина отрезка BD является центром окружности с диаметром AC, причем точки A, B, C, D не лежат на одной прямой. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

II вариант

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, O – точка пересечения диагоналей. Периметр ΔAOD равен 25 см, $AC = 16$ см, $BD = 14$ см. Найдите BC.
2. В параллелограмме $ABCD$ с острым углом A из вершины B опущен перпендикуляр BK к прямой AD, $AD = BK$.
   Найдите $\angle C$, $\angle D$.
3. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении диагонали AC за вершины A и C отмечены точки M и N соответственно так, что $AM = CN$. Докажите, что $MBND$ – параллелограмм.

II уровень

I вариант

1. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180°$, $AB \parallel CD$. На сторонах BC и AD отмечены точки M и K соответственно так, что $BM = KD$. Докажите, что точки M и K находятся на одинаковом расстоянии от точки пересечения диагоналей четырехугольника.
2. На сторонах PK и MH параллелограмма $MPKH$ взяты точки A и B соответственно, $MP = PB = AK$; $\angle MPB = 60°$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки BM и AH.
3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка K, а на сторонах AB и BC – точки M и P соответственно, причем $PK = MB$, $\angle KPC = 80°$, $\angle C = 50°$. Докажите, что $KMBP$ – параллелограмм.

II вариант

1. В четырехугольнике $MPKH$ $\angle PMK = \angle HKM$, $PK \parallel MH$. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, пересекающая стороны PK и MH в точках A и B соответственно.
   Докажите, что $AP = HB$.
2. На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и K, $AB = BM = KD$, $\angle AMB = 30°$. Найдите углы параллелограмма и сравните отрезки AM и CK.

3. В треугольнике MPK $\angle M = 65°$. На сторонах MK, MP, PK отмечены точки A, B, C соответственно так, что середина стороны PK – точка C, $AM = KC$, $BP = AC$, $\angle BAM = 50°$. Докажите, что $BPCA$ – параллелограмм.

III уровень

I вариант

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = 180°$. Через точку O пересечения диагоналей четырехугольника проведена прямая, пересекающая стороны DC и AD в точках M и K соответственно; $\angle BOM = 90°$.
Докажите, что $BK = BM$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки M и H соответственно так, что отрезки BH и MD пересекаются в точке O; $\angle BHD = 95°$, $\angle DMC = 90°$, $\angle BOD = 155°$. Найдите отношение длин отрезков AB и MD и углы параллелограмма.
3. Точки M и K являются соответственно серединами сторон AB и BC треугольника ABC. Через вершину C вне треугольника проведена прямая, параллельная AB и пересекающая луч MK в точке E. Докажите, что $KE = AC : 2$.

II вариант

1. В выпуклом четырехугольнике $MPKH$ $\angle M + \angle P = 180°$, $\angle MKH = \angle KMP$. На сторонах MH и PK отмечены точки A и B так, что $PB = PA$. Отрезок AB проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника. Докажите, что $HP \perp AB$.
2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K и M соответственно. Отрезки BM и KD пересекаются в точке O; $\angle BOD = 140°$, $\angle DKB = 110°$, $\angle BMC = 90°$. Найдите отношение длин отрезков MC и AD и углы параллелограмма.
3. Точки A и B принадлежат соответственно сторонам PE и ET треугольника PET. Прямая, проходящая через вершину T вне треугольника, пересекает луч AB в точке K так, что $AP = KT$, $AB = BK = PT : 2$. Докажите, что точка A является серединой отрезка PE.

V. Подведение итогов урока

Собрать тетради для проверки самостоятельной работы.

Домашнее задание

Решить задачи № 375, 380, 384 (устно) и задачу № 14 из рабочей тетради.

Дополнительные задачи

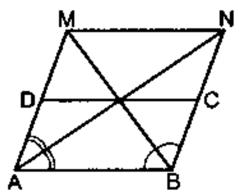


Рис. 127

I уровень

Дано: $ABCD$ – параллелограмм. AN – биссектриса $\angle BAD$, BM – биссектриса $\angle ABC$ (рис. 127).

Доказать: $ABNM$ – параллелограмм.

II уровень

Докажите, что угол между перпендикулярами, проведенными из вершины тупого угла параллелограмма к прямым, содержащим стороны параллелограмма, равен острому углу параллелограмма, а угол между перпендикулярами, проведенными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма.

Урок 8
Трапеция

Цели урока:

- Ввести понятие трапеции и ее элементов, познакомить учащихся с равнобедренной и прямоугольной трапециями.
- Рассмотреть некоторые свойства равнобедренной трапеции.
- Научить учащихся применять полученные знания в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

1. Работа над ошибками самостоятельной работы с использованием готовых ответов и указаний к задачам (можно объединить учащихся одного варианта по группам для того, чтобы они могли проконсультироваться друг у друга или вместе разобраться в решении задачи).

I уровень

I вариант

1. См. рис. 128. $ABCD$ – параллелограмм, тогда $CD = AB = 13$ см, $OC = AO = 10$ см, $BD = OD = 5$ см (объясни).
$P_{COD} = 10 + 5 + 13 = 28$ см

2. См. рис. 129. $BK = AB/2$, тогда $\angle A = 30°$ (объясни), значит $\angle C = 30°$, $\angle D = 150°$ (объясни).

3. См. рис. 130. В четырехугольнике $ABCD$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит $ABCD$ – параллелограмм.

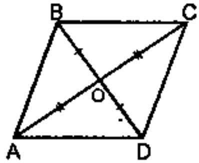


Рис. 128

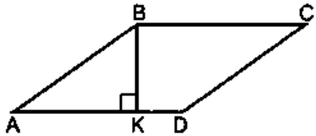


Рис. 129

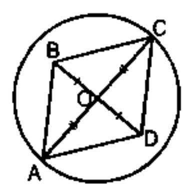


Рис. 130

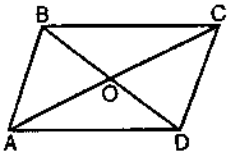


Рис. 131

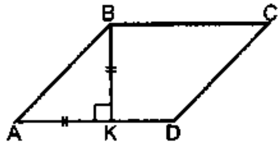


Рис. 132

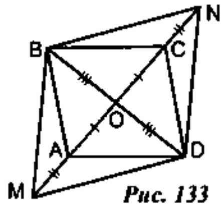


Рис. 133

II вариант

1. См. рис. 131. $ABCD$ – параллелограмм, тогда $AO = CO = 8$ см, $BO = DO = 7$ см (объясни).
   Т. к. $P_{AOD} = 25$ (см), то $BC = AD = 10$ (см).
2. См. рис. 132. $AK = BK$, тогда $\angle A = 45°$ (объясни), $\angle C = 45°$, $\angle D = 135°$ (объясни).
3. См. рис. 133. $ABCD$ – параллелограмм, тогда $AO = CO$, $BO = DO$. В четырехугольнике $MBND$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, значит $MBND$ – параллелограмм.

II уровень

I вариант

1. См. рис. 134.
   а) Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм и $BC \parallel AD$.
   б) Докажите, что $\Delta BOM = \Delta DOK$ и $OM = OK$.
2. См. рис. 135.
   а) Докажите, что ΔMPB – равносторонний, $\angle M = 60°$, $\angle K = 60$.
   б) Докажите, что ΔAKH – равносторонний, $\Delta AKH = \Delta MPB$, тогда $MB = AH$, $\angle M = \angle K = 60°$, $\angle P = \angle H = 120°$.
3. См. рис. 136.
   а) Найди $\angle B$ и докажи, что $MB \parallel KP$.
   б) Докажи, что $MBPK$ – параллелограмм.

II вариант

1. См. рис. 137.
   а) Докажи, что $ABCD$ – параллелограмм и $PO = HO$.
   б) Докажи, что $\Delta POA = \Delta HOB$ и $PA = HB$.
2. См. рис. 138.
   а) Докажи, что ΔABM – равнобедренный, $\angle B = 120°$, $\angle BAD = 60°$.

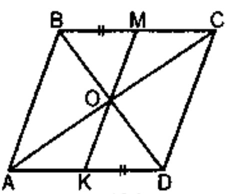


Рис. 134

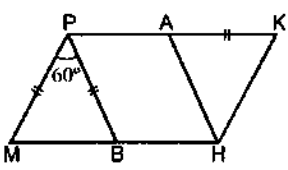


Рис. 135

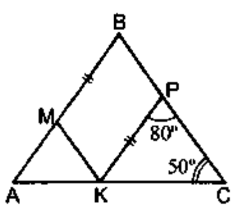


Рис. 136

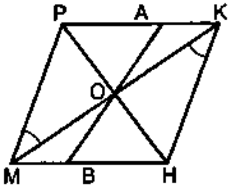


Рис. 137

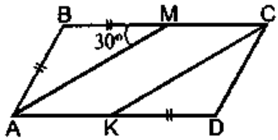


Рис. 138

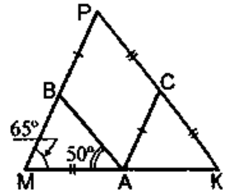


Рис. 139

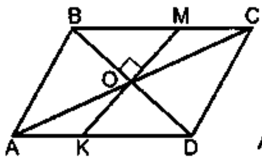


Рис. 140

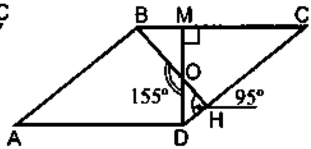


Рис. 141

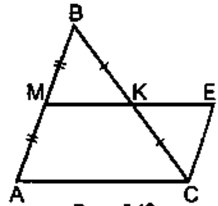


Рис. 142

б) Докажи, что $\Delta ABM = \Delta KDC$ и $AM = KC$, $\angle B = \angle D = 120°$, $\angle A = \angle C = 60°$.

3. См. рис. 139.
   а) Докажи, что в ΔABM $MA = BA$.
   б) Докажи, что *BPCA* – параллелограмм.

III уровень

I вариант

1. См. рис. 140.
   а) Докажи, что *ABCD* – параллелограмм и $AO = CO$.
   б) Докажи, что $\Delta AOK = \Delta COM$ и $KO = MO$.
   в) Докажи, что $\Delta BKO = \Delta BMO$ и $BK = BM$.
2. См. рис. 141.
   $\angle MDC = 60°$, $\angle MCD = 30°$ (объясни).
   $MD = CD/2$, $AB : MD = 2 : 1$, $\angle C = \angle A = 30°$, $\angle B = \angle D = 150°$.
3. См. рис. 142.
   а) Докажи, что $\Delta MBK = \Delta ECK$ и $EC = MB = AM$, $KE = MK = ME/2$.
   б) Докажи, что *AMEC* – параллелограмм и $ME = AC$, т. е. $KE = AC/2$.

II вариант

1. См. рис. 143.
   а) Докажи, что *MPKH* – параллелограмм и $MO = OK$.
   б) Докажи, что $\Delta MOA = \Delta KOB$ и $AO = OB$.
   в) Докажи, что $PO \perp AB$ и $PH \perp AB$.

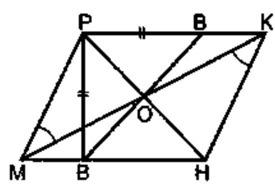


Рис. 143

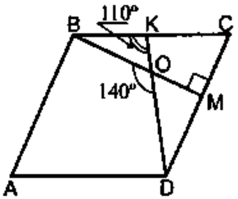


Рис. 144

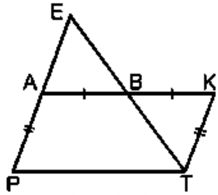


Рис. 145

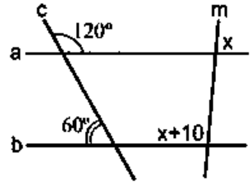


Рис. 146

II вариант

2. См. рис. 144.
   $\angle KDC = 50°$, $\angle MCB = 60°$, $\angle CBM = 30°$ (объясни).
   $CM = BC/2$; $MC : AD = 1 : 2$; $\angle C = \angle A = 60°$, $\angle B = \angle D = 120°$.
3. См. рис. 145.
   а) Докажи, что $PAKT$ – параллелограмм и $PE \parallel KT$.
   б) Докажи, что $\Delta AEB = \Delta KTB$ и $AE = KT = PA$, т. е. A – середина PE.

Решение задач на готовых чертежах

(Устная фронтальная работа с классом с целью подготовки к изучению нового материала.)

1. Рис. 146. *Найти*: x.
   (*Ответ*: $x = 85°$.)
2. Рис. 147. *Найти*: y.
   (*Ответ*: $y = 95°$.)
3. Рис. 148. *Найти*: z.
   (*Ответ*: $z = 30°$.)

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие *трапеции*, ее *оснований* и *боковых сторон*.

В тетрадях учащихся и на доске рисунок (рис. 149) и записи:

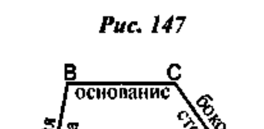


Рис. 147

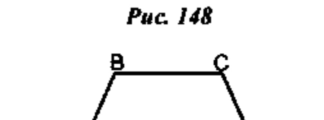


Рис. 148

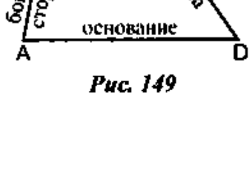


Рис. 149

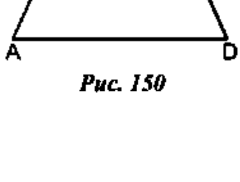


Рис. 150

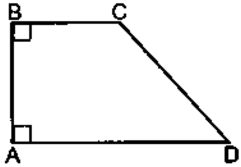


Рис. 151

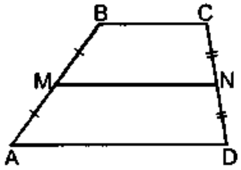


Рис. 152

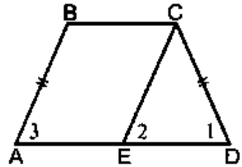


Рис. 153

$ABCD$ – трапеция, если $BC \parallel AD$.
AB и CD – боковые стороны
BC и AD – основания.

2. Ввести понятия *равнобедренной* трапеции, *прямоугольной* трапеции.

В тетрадях учащихся и на доске рисунки и записи:
Рис. 150. Равнобедренная трапеция.
Рис. 151. Прямоугольная трапеция.

3. Ввести понятие *средней линии* трапеции.

В тетрадях учащихся и на доске рисунок и записи:
Рис. 152. M – середина AB, N – середина CD,
MN – средняя линия трапеции.

Исследование свойств равнобедренной трапеции

Разбить класс на небольшие группы и предложить задания:

1. Исследовать углы равнобедренной трапеции.
2. Исследовать диагонали равнобедренной трапеции.

Результаты исследований выслушать и обсудить, на доске и в тетрадях записать:

Свойства равнобедренной трапеции:

1. Рис. 153. В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны.

Доказательство: Проведем $CE \parallel AB$.
$ABCE$ – параллелограмм ($AB \parallel CE$, $BC \parallel AD$).
$CD = AB = CE$, ΔCDE – равнобедренный, $\angle 1 = \angle 2$.
$AB \parallel CE$, тогда $\angle 2 = \angle 3$. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.
$\angle ABC = 180° - \angle 3 = 180° - \angle 1 = \angle BCD$.

2. Рис. 154. В равнобедренной трапеции диагонали равны.

Доказательство: $\Delta ABC = \Delta DCB$ ($AB = DC$, BC – общая сторона, $\angle ABC = \angle DCD$), тогда $AC = BD$.

Изучение признаков равнобедренной трапеции

Задание:

– Сформулируйте утверждения, обратные свойствам равнобедренной трапеции, и выясните их справедливость.

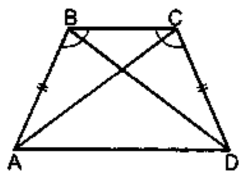


Рис. 154

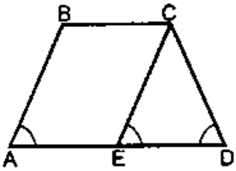


Рис. 135

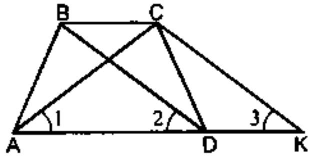


Рис. 156

Результаты работы выслушать и обсудить, на доске и в тетрадях записать:

Признаки равнобедренной трапеции

1. Рис. 155. Если углы при основании трапеции равны, то она равнобедренная.

Доказательство: Проведем $CE \parallel AB$.

$ABCE$ – параллелограмм, тогда $AB = CE$, $\angle A = \angle CED$.

ΔCED – равнобедренный ($\angle D = \angle CED$), тогда $CE = CD$.

$AB = CE = CD$, тогда $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

2. Рис. 156. Если диагонали трапеции равны, то она равнобедренная.

Доказательство: Проведем $CK \parallel BD$.

$BCKD$ – параллелограмм ($CK \parallel BD$, $BC \parallel AK$).

ΔACK – равнобедренный ($AC = BD = CK$), $\angle 1 = \angle 2$.

$CK \parallel BD$, $\angle 2 = \angle 3$, тогда $\angle 1 = \angle 3$.

$\Delta ABD = \Delta DCA$ ($AC = BD$, AD – общая сторона, $\angle 1 = \angle 3$), тогда $AB = CD$, т. е. $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

IV. Работа в рабочих тетрадях

Решить задачи № 16, 18.

Учащиеся работают самостоятельно, затем один из учащихся читает свое решение задачи № 16, учащиеся в классе внимательно слушают его решение, сравнивают со своим.

– Как вы считаете, верно ли решена задача?

– У кого другое решение?

Таким же образом проверяется решение задачи № 18.

Задача № 16. *Ответ*: $\angle M = 71°$, $\angle P = 143°$.

Задача № 18. *Ответ*: $AD = 22$ см.

V. Подведение итогов урока

Выставить оценки наиболее активным учащимся.

Домашнее задание

П. 44, вопросы 10, 11; выучить признаки и свойства равнобедренной трапеции;

Решить задачи № 386, 387, 390; повторить № 384 (устно); решить задачу № 17 из рабочей тетради.

Урок 9
Теорема Фалеса

Цели урока:
- Рассмотреть теорему Фалеса и закрепить ее в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение свойств равнобедренной трапеции, ее признаков, а также на применение знаний по теме «Трапеция».

Ход урока

I. Организационный момент
Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся
Теоретический опрос
- Какой четырехугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции?
- Какая трапеция называется прямоугольной? равнобедренной?
- Сформулируйте свойства равнобедренной трапеции.
- Сформулируйте признаки равнобедренной трапеции.
- Что такое средняя линия трапеции? Сформулируйте свойство средней линии трапеции.

Проверка домашнего задания
Подготовить на доске рисунок и краткую запись решения задач № 387, 390 – 2 ученика. (Работа проводится во время теоретического опроса.)

Задача № 387 (см. рис. 157).

$\angle A + \angle B = 180°$;

$\angle C + \angle D = 180°$;

$\angle B = 144°$, $\angle D = 63°$.

Задача № 390 (см. рис. 158).

$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.

$\angle D = 68°$, $\angle B = 112°$, $\angle C = 112°$.

III. Решение задач на готовых чертежах
Самостоятельно, с последующей проверкой. Учащиеся в тетрадях записывают только ответы или краткое решение по необходимости.

1. Рис. 159. *ABCD* – трапеция. *Найти:* $\angle AOB$.

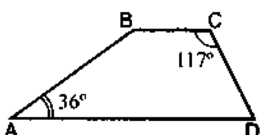


Рис. 157

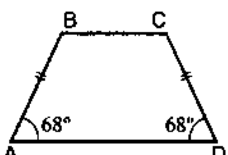


Рис. 158

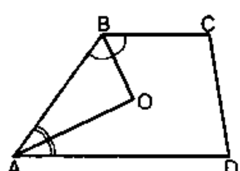


Рис. 159

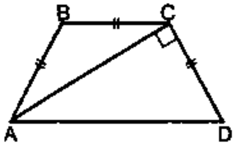


Рис. 160

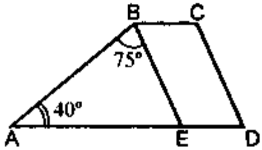


Рис. 161

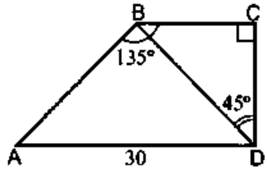


Рис. 162

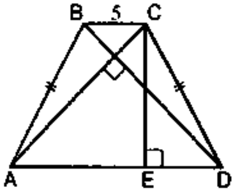


Рис. 163

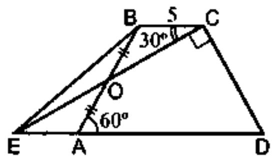


Рис. 164

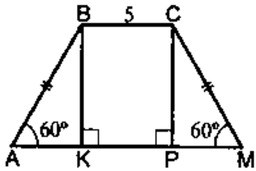


Рис. 165

2. Рис. 160. $ABCD$ – трапеция.
   Найти: углы трапеции.
3. Рис. 161. $ABCD$ – трапеция, $BE \parallel CD$.
   Найти: углы трапеции.
4. Рис. 162. $ABCD$ – трапеция.
   Найти: BC.
5. Рис. 163. $ABCD$ – трапеция, $AD = 15$.
   Найти: CE.
6. Рис. 164. $ABCD$ – трапеция, $AD = 15$.
   Найти: P_{ABCD}.
7. Рис. 165. $ABCM$ – трапеция, $AM = 7$.
   Найти: CM.
8. Рис. 166. $ABCD$ – трапеция.
   Найти: $\angle C$.
9. Рис. 167. $ABCD$ – трапеция.
   Найти: AE и AD.

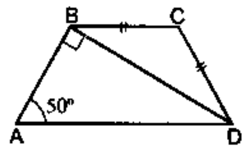


Рис. 166

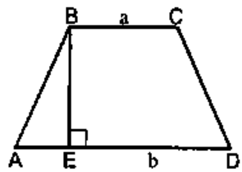


Рис. 167

Ответы к задачам:

1. $\angle AOB = 90°$.
2. $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.
3. $\angle A = 40°$, $\angle D = 65°$, $\angle C = 115°$, $\angle B = 140°$.
4. $BC = 15$.
5. $CE = 10$.
6. $P_{ABCD} = 40$.
7. $CM = 2$.
8. $\angle C = 100°$.
9. $AE = b - a$, $AD = 2b - a$.

IV. Изучение нового материала

Устно повторить решение задачи № 384.

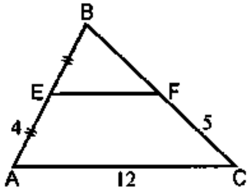


Рис. 169

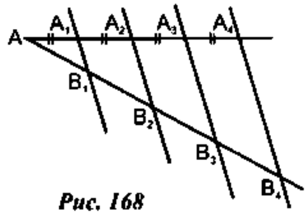


Рис. 168

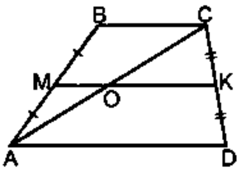


Рис. 170

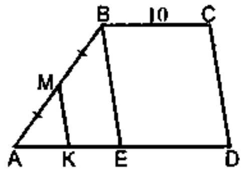


Рис. 171

Знакомство с теоремой Фалеса (см. задачу № 385).

Закрепление теоремы Фалеса в процессе решения задач (устно).

1. Рис. 168. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$;
   $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$;
   $AB_4 = 20$ см.
   Найти: B_2B_3.
2. Рис. 169. *Дано*: $EF \parallel AC$.
   Найти: P_{ABC}
3. Рис. 170. $ABCD$ – трапеция.
   Доказать: $AO = CO$.
4. Рис. 171. $ABCD$ – трапеция, $MK \parallel BE \parallel CD$, $AD = 16$.
   Найти: AK.

V. Самостоятельная работа обучающего характера

В зависимости от уровня подготовленности класса в целом и каждого ученика в отдельности, можно предложить задачи дифференцированно: менее подготовленным учащимся – задачи I уровня; учащимся с высоким уровнем подготовки – задачи III уровня; большей части класса – задачи II уровня. Учитель в процессе решения по необходимости оказывает индивидуальную помощь учащимся, выбравшим трудный вариант (трудный для данного ученика).

После окончания работы проводится самопроверка.

I уровень

I вариант

1. В трапеции $ABCD$ BC – меньшее основание. На отрезке AD взята точка E так, что $BE \parallel CD$, $\angle ABE = 70°$, $\angle BEA = 50°$. Найдите углы трапеции.

2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Меньшая боковая сторона и меньшее основание равны по 10 см. Найдите большее основание.

II вариант

1. В трапеции *MHPK MK* – большее основание. Прямые *MH* и *PK* пересекаются в точке *E*, $\angle MEK = 80°$, $\angle EHP = 40°$. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°. Большая боковая сторона и большее основание равны по 20 см. Найдите меньшее основание.

II уровень

I вариант

1. В равнобедренной трапеции диагональ составляет с боковой стороной угол в 120°. Боковая сторона равна меньшему основанию. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции острый угол и угол, который составляет меньшая диагональ с меньшим основанием, равны по 60°. Найдите отношение оснований.

II вариант

1. В равнобедренной трапеции большее основание в два раза превосходит меньшее. Середина большего основания удалена от вершины тупого угла на расстояние, равное длине меньшего основания. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, острый угол равен 45°. Найдите отношение оснований.

III уровень

I вариант

1. Из вершины тупого угла равнобедренной трапеции *ABCD* проведен перпендикуляр *CE* к прямой *AD*, содержащей большее основание. Докажите, что $AE = (AD + BC)/2$.
2. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Большая диагональ составляет с меньшей боковой стороной угол в 60°. Докажите, что меньшая диагональ равна полусумме оснований трапеции.

II вариант

1. Диагонали равнобедренной трапеции *ABCD* взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние между прямыми *AD* и *BC*, содержащими основания, равно $(AD + BC)/2$.
2. Из вершины прямого угла меньшего основания прямоугольной трапеции под углом 45° к этому основанию проведен луч, который проходит через середину большей боковой стороны. Докажите, что меньшая боковая сторона этой трапеции равна сумме оснований.

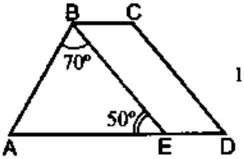


Рис. 172

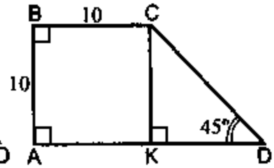


Рис. 173

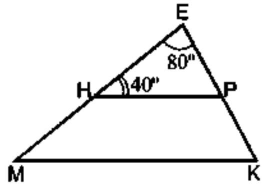


Рис. 174

Ответы и указания для самопроверки

(Каждый ученик получает ответы и указания в распечатанном виде после того, как он выполнил задание. Тут же ученик проверяет и выполняет работу над ошибками.)

I уровень

I вариант

1. Рис. 172.

$\angle A = 60°$; $\angle ABC = 120°$; $\angle D = \angle BEA = 50°$; $\angle C = 130°$.

2. Рис. 173.

Проведи $CK \perp AD$, тогда $CK = 10$ см, $KD = 10$ см, $AK = 10$ см (объясни). $AD = 10 + 10 = 20$ см.

II вариант

1. Рис. 174.

$\angle M = 40°$; $\angle MHP = 140°$; $\angle K = 60°$; $\angle HPK = 120°$.

2. Рис. 175.

Проведи $BK \perp AD$, тогда $AK = 10$ см, $KD = 10$ см, $BC = 10$ см (объясни).

II уровень

I вариант

1. Рис. 176.

Докажи, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. $\angle C = \angle ABC = 120° + \angle 1$;

$\angle C + \angle CDA = 180°$, тогда $\angle 1 + 120° + 2 \cdot \angle 1 = 180°$, $\angle 1 = 20°$, значит, $\angle A = \angle CDA = 40°$, $\angle ABC = \angle C = 140°$.

2. Рис. 177.

Докажи, что $\angle CAD = 60°$, ΔACD – равносторонний.

В ΔABC $BC = AC/2 = AD/2$. $BC : AD = 1 : 2$.

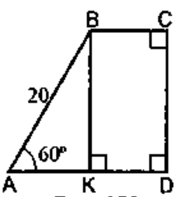


Рис. 175

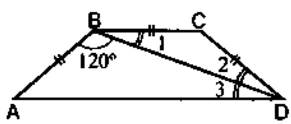


Рис. 176

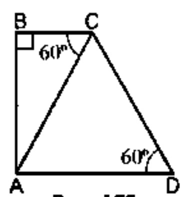


Рис. 177

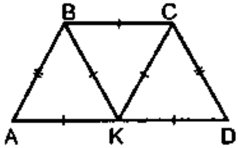


Рис. 178

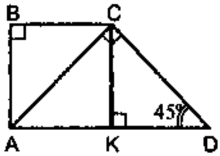


Рис. 179

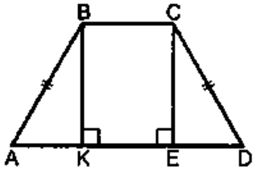


Рис. 180

II вариант

1. Рис. 178.

Докажи, что ΔBCK – равносторонний, тогда $\angle CBK = 60°$, $\angle KBA + \angle BAK = 120°$, $\angle KBA = \angle BAK = 60°$, значит $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle ABC = \angle BCD = 120°$.

2. Рис. 179.

Проведи $CK \perp AD$ и докажи, что $BC = AB = CK = AK = AD/2$.

$BC : AD = 1 : 2$.

III уровень

I вариант

1. Рис. 180.

Докажи, что $AK = ED$, тогда $AD = AK + KE + ED = 2ED + BC$,

$ED = (AD - BC) : 2$, значит $AE = AD - DE = AD - (AD - BC) : 2 = (AD + BC) : 2$.

2. Рис. 181. $\angle ADO = \angle CBO = 30°$, $AD = 2AO$, $BC = 2CO$,

$AC = AO + OC = AD : 2 + BC : 2 = (AD + BC) : 2$.

II вариант

1. Рис. 182.

Докажи, что $\angle CAD = \angle BDA$ из равенства ΔCAD и ΔBDA, тогда $AO = OD$ и $OM = AD/2$, $BO = OC$ и $ON = BC$, значит, $MN = (AD + BC)$.

2. Рис. 183.

Докажи, что $BC = DM$, тогда в ΔABM. $AB = AM = AD+DM = AD+BC$.

VI. Подведение итогов урока

Собрать тетради на проверку.

Домашнее задание

Решить задачи № 391, 392; выучить доказательство теоремы Фалеса по записям в тетради или используя задачи № 384, 385.

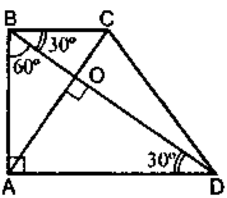


Рис. 181

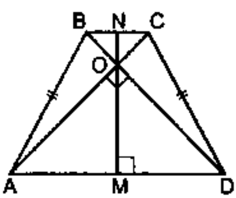


Рис. 182

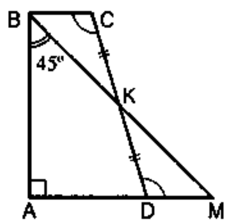


Рис. 183

Дополнительная задача:

В равнобедренной трапеции острый угол равен 60°. Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

Урок 10
Задачи на построение

Цели урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на построение.
- Научить учащихся делить данный отрезок на n равных частей.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Работа у доски

Подготовить у доски доказательство теоремы Фалеса. (Спросить одного из наиболее подготовленных учащихся, ответ заслушать всем классом после проверки домашнего задания.)

Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи: № 392 (устно по подготовленному на доске рисунку) и дополнительную домашнюю задачу (можно через графопроектор).

Решение дополнительной домашней задачи (см. рис. 184).

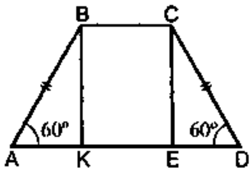


Рис. 184

Проведем высоты $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, тогда в прямоугольном треугольнике ABK $\angle ABK = 30°$ и $AK = AB/2$, а в прямоугольном ΔDCE $\angle DCE = 30°$ и $DE = CD/2$.

Т. к. $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, то $BK \parallel CE$, кроме того, $BC \parallel AD$, т. к. $ABCD$ – трапеция, тогда $KBCE$ – параллелограмм и $BC = KE$.

Следовательно, $AD = AK + KE + DE = AB : 2 + BC + CD : 2 =$
$= AB : 2 + BC + AB : 2 = AB + BC$, тогда $BC = AD - AB$.

Работа по индивидуальным карточкам

3–6 учащихся решают задачи на карточках во время проверки домашнего задания.

I уровень

1. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, $AD > BC$. На стороне AD отмечена точка K так, что $KBCD$ – параллелограмм. Периметр треугольника ABK равен 25 см, $DE = 6$ см. Найдите периметр трапеции.

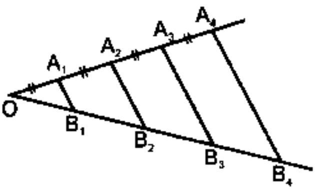


Рис. 185

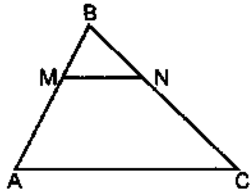


Рис. 186

2. *Дано*: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_4 =$ 20 см (см. рис. 185).
Найти: B_1B_4.

II уровень

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне, $\angle A = 60°$, $AD = 15$ см, $BC = 10$ см. Найдите периметр трапеции.
2. Рис. 186. *Дано*: ΔABC, $BM : MA = 1 : 2$, $MN \parallel AC$, $BC = 15$ см.
Найти: BN, NC.

III уровень

1. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC соответственно равны 20 см и 10 см. Через вершину C и середину AB проведена прямая, пересекающая продолжение стороны AD в точке K. Известно, что $CK \perp CD$, $\angle BAD = 60°$, $\angle CKD = 30°$.
Найдите периметр трапеции.
2. Рис. 187. *Дано*: ΔABC, $BE : EA = 1 : 3$, $EK \parallel AC$, $P_{ABC} = 36$ см.
Найти: P_{BEK}.

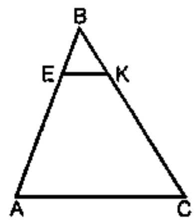


Рис. 187

Повторение простейших задач на построение

Работа проводится на доске и в тетрадях (без доказательства). Для решения каждой задачи к доске вызвать одного ученика, заслушать его проект решения и обсудить правильность.

а) построить середину данного отрезка;

б) построить биссектрису данного угла;

в) построить прямую, перпендикулярную данной;

г) построить прямую, параллельную данной.

III. Решение задач

Задачи 1–4 решить всем вместе. Для этого перед решением каждой задачи дать 1–2 минуты на обдумывание, а затем выслушать различные способы решений, выбрать из всего предложенного с помощью учащихся наиболее верное решение.

Задачи 5 и 6 учащиеся решают самостоятельно, при этом учитель оказывает индивидуальную помощь отдельным учащимся.

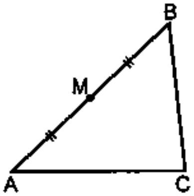


Рис. 188

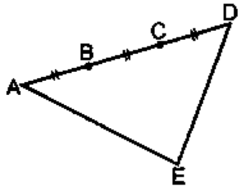


Рис. 189

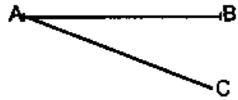


Рис. 190

Задачу 7 (№ 395 учебника) решить всем вместе.

1. Рис. 188. Используя циркуль и линейку без делений, через точку M провести прямую так, чтобы она пересекала отрезок AC в его середине.
2. Рис. 189. С помощью циркуля и линейки разделите отрезки AE и DE на три равные части.
3. Рис. 190. С помощью циркуля и линейки разделите отрезок AB на 5 равных частей.
4. Как разделить данный отрезок на n равных частей?
5. Задача № 19 (из рабочей тетради)
6. Задача № 20 (из рабочей тетради)
7. На доске и в тетрадях решить задачу № 395 (см. рис. 191)

Построить: параллелограмм $ABCD$ так, что $\angle A = \angle(hk)$, $AB = P_2Q_2$ и расстояние между AB и DC равно P_1Q_1.

Построение:

а) $\angle BAD = \angle(hk)$;
б) $AB = P_2Q_2$;
в) $BN \perp AB$, $BN = P_1Q_1$;
г) $CD \perp BN$;
д) $BC \parallel AD$;
$ABCD$ – искомый параллелограмм.

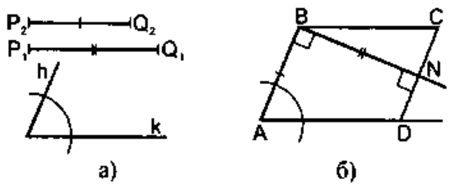


Рис. 191

Доказательство:

По построению $AB \parallel CD$, т. к. $AB \perp BN$ и $CD \perp BN$; $AD \parallel BC$, значит, $ABCD$ – искомый параллелограмм.

8. Решить самостоятельно задачи № 397 а), б) с последующим обсуждением принципа построения

Задача № 397 а)

Дано: $\angle A = \alpha$, $AD = a$, $AB = b$ (рис. 192).

Построить: равнобедренную трапецию $ABCD$.

Построение:

1) На прямой c отложить отрезок $AD = a$;

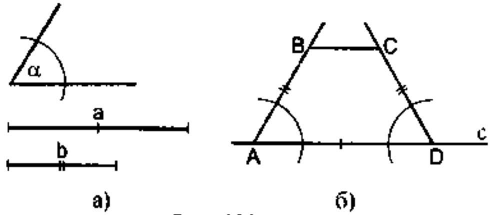


Рис. 192

2) Построить $\angle A = \alpha$, $\angle D = \alpha$;

3) На лучах AB и DC отложить отрезки, равные b ($AB = DC = b$);

4) Соединить B и C отрезком. $ABCD$ – искомая трапеция.

Задача может не иметь решения, если точки B и C совместятся или точки B и C расположены за точкой пересечения лучей B и C.

Задача № 397 б)

Дано: $AB = a$, $BD = b$, $BC = c$. (рис. 193).

Построить: равнобедренную трапецию $ABCD$.

Построение:

Так как трапеция равнобедренная, то $AB = CD$.

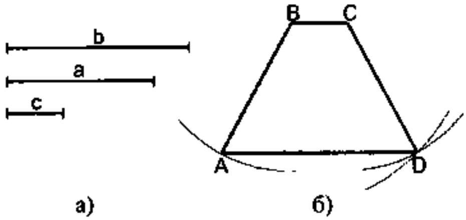


Рис. 193

1) Строим отрезок $BC = c$.
2) Построим окружность с центром в точке C и радиусом a и окружность с центром в точке B и радиусом b. Точку их пересечения обозначим D.
3) Через точку D проведем $DA \parallel BC$.
4) Построим окружность с центром в точке B и радиусом a. Эта окружность пересекает прямую AD в точке A.

   Трапеция $ABCD$ – искомая.

Задача не имеет решения, если один из отрезков a, b или c превосходит или равен сумме двух других.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Прочитать решение задач № 396, 393 в);

Решить задачи № 394, 398, 393 б).

Урок 11
Прямоугольник

Цели урока:

- Повторить понятие прямоугольника, опираясь на полученные знания в курсе математики 1–6 классов учащихся.
- Рассмотреть свойства прямоугольника как частного вида параллелограмма и научить учащихся применять их в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить цель урока, тему урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Практическое задание

Разделить данный отрезок на 7 равных частей.

(Один из учащихся работает самостоятельно у доски, остальные в тетрадях.)

Проверка домашнего задания

Проверить решение домашних задач № 393 б), 398. Два ученика оформляют решение задач на доске, пока класс выполняет практическое задание. Учащиеся, работавшие у доски, рассказывают ход решения задач.

Решение задач на готовых чертежах

Фронтальная работа с классом (устно). Такая работа проводится с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если их градусные меры пропорциональны числам 1, 2, 3, 4.
2. Рис. 194. Докажите, что расстояния AM и CN от вершин A и C параллелограмма $ABCD$ до прямой BD равны.

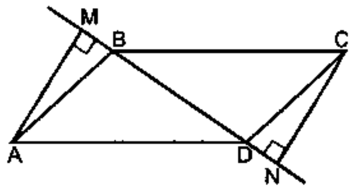


Рис. 194

3. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если $\angle A = 3\angle B$.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие прямоугольника.

Учащиеся знакомы с прямоугольником еще с начальной школы, поэтому ввести понятие прямоугольника можно в процессе ответов на вопросы:

– Какой четырехугольник называется прямоугольником? (Ученики могут дать различные ответы, например: «Это четырехугольник, у которого все углы прямые»; «Это четырехугольник, у которого противолежащие стороны равны».)
– Можно ли утверждать, что прямоугольник – это параллелограмм, и почему?
– Чем отличается произвольный параллелограмм от прямоугольника?
– Закончите предложение: «Прямоугольник – это параллелограмм, у которого ...»
– Сформулируйте свойства прямоугольника.

2. Рассмотреть особое свойство диагоналей прямоугольника.

Задание для учащихся (самостоятельно, можно в небольших группах):

– Исследуйте стороны, углы и диагонали прямоугольника и заполните таблицу.

	параллелограмм	прямоугольник
стороны	1. 2.	1. 2.
углы	1. 2.	1. 2. 3.
диагонали	1.	1. 2.

3. Рассмотреть признак прямоугольника.

– Как определить, является ли данный параллелограмм прямоугольником? Ответ обоснуйте.

(Дать учащимся 3–5 минут на обдумывание и обсудить варианты ответов.)

– Выберите верные утверждения (устно):

а) Если в четырехугольнике диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник – прямоугольник.

б) Если в четырехугольнике противоположные стороны параллельны, а все его углы прямые, то этот четырехугольник – прямоугольник.

в) Если в четырехугольнике диагонали равны, то этот четырехугольник – прямоугольник.

г) Если в параллелограмме два угла прямых, то этот параллелограмм – прямоугольник.

д) Если в четырехугольнике два прямых угла и две стороны равны, то этот четырехугольник – прямоугольник.

е) Если в четырехугольнике диагонали равны, а один угол прямой, то этот четырехугольник – прямоугольник.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях. Учащиеся самостоятельно решают задачи, по окончании работы один из учащихся читает свое решение задачи № 21, идет обсуждение правильности решения. Таким же образом проверяется задача № 23.

Задача № 21. *Ответ*: $P_{ABCD} = 110$ см.

Задача № 23. *Ответ*: $\angle DAO = 20°$.

2. Решить задачу № 401 б) на доске и в тетрадях. Учитель вызывает одного из учащихся к доске для решения задачи.

Задача № 401 б)

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, AK – биссектриса $\angle A$ и делит CD на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм (рис. 195).

Найти: P_{ABCD}.

Решение: Так как AK – биссектриса $\angle A$, то $\angle BAK = \angle KAD = 45°$ (т. к. $\angle A = 90°$). ΔADK – прямоугольный, $\angle AKD = 90 - \angle KAD = 45°$, тогда ΔADK – равнобедренный, значит $AD = KD$.

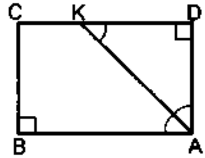


Рис. 195

Возможны случаи:

а) Если $KD = 2{,}7$ дм, $CK = 4{,}5$ дм, то $AD = KD = 2{,}7$ дм;
$DC = DK + CK = 2{,}7 + 4{,}5 = 7{,}2$ дм.
Тогда $P_{ABCD} = 2 \cdot (2{,}7 + 7{,}2) = 19{,}8$ дм.

б) Если $KD = 4{,}5$ дм, $CK = 2{,}7$ дм, то $AD = KD = 4{,}5$ дм, $DC = 7{,}2$ дм.
Тогда $P_{ABCD} = 23{,}4$ дм.

Ответ: 19,8 дм или 23,4 дм.

Наводящие вопросы:

– Биссектриса AK отсекает от прямоугольника треугольник AKD. Что вы можете сказать об этом треугольнике?
– Сколько решений имеет задача?

3. Решить самостоятельно № 400, 402, 403 (к задачам № 400, 402 записать краткое решение, к задаче № 403 – полное решение).

Задача № 403

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AC \cap BD = O$, $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см (рис. 196).

Найти: P_{AOB}.

Решение: ΔACD – прямоугольный, в нем $\angle CAD = 30°$, значит $CD = AC/2 = 6$ см, тогда $AB = CD = 6$ см.

В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, т. е. $AO = AC/2 = BD/2 = BO = 6$ см.

$P_{AOB} = AO + BO + AB = 6 + 6 + 6 = 18$ см.

Ответ: $P_{AOB} = 18$ см.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 45, вопросы 12, 13;

Задачи № 399, 401 а), 404, задачу № 22 из рабочей тетради

Задача № 22

Решение (см. рис. 197):

а) В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, поэтому $\angle D = 30°$, и по свойству катета, лежащего против угла в 30°, имеем $BD = 2 \cdot AB = 24$ см.

б) Так как в прямоугольнике диагонали равны, то $AC = BD = 24$ см.

Ответ. $AC = 24$ см.

Дополнительная задача

Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны

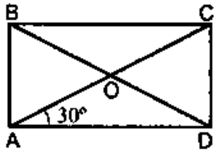


Рис. 196

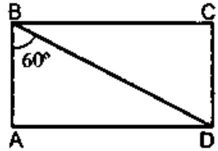


Рис. 197

KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB = BM = 6$. Найдите большую сторону прямоугольника.

Урок 12
Ромб. Квадрат

Цели урока:

- Ввести понятия ромба и квадрата как частных видов параллелограмма.
- Рассмотреть свойства и признаки ромба и квадрата и показать их применение в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

Решение дополнительной домашней задачи заранее готовит один из учащихся, успешно справившихся с ее решением (рис. 198).

а) Прямоугольные ΔMOB и ΔKOA равны по катету и прилежащему к нему острому углу ($KO = MO$, т. к. O – середина диагонали KM; $\angle BMO = \angle AKO$ как накрест лежащие при параллельных прямых KL и MN и секущей KM), тогда $AO = OB = 3$ см ($AB = 6$ см), $AK = MB = 6$ см.

б) $\Delta AMO = \Delta BMO$ по двум катетам ($AO = BO$, MO – общая сторона, $\angle AOM = \angle MOB = 90°$), тогда $AM = MB = 6$ см и ΔAMB – равносторонний.

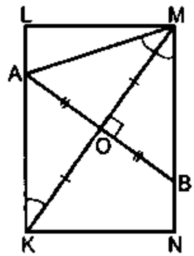


Рис. 198

в) $\angle AMO = \angle BMO = 30°$, т. к. ΔAMB – равносторонний, MO – медиана, высота и биссектриса ΔAMB.

г) $\angle KLM = 90°$, $\angle AMO = 30°$, $\angle\Delta BMO = 30°$, тогда $\angle AML = 30°$.

д) ΔALM – прямоугольный, в нем $\angle AML = 30°$, $AM = 6$ см, тогда $AL = 3$ см.

е) $AK = 6$ см, $AL = 3$ см, тогда $KL = 9$ см.

Ответ: $KL = 9$ см.

III. Решение задач

I уровень – решение задач на готовых чертежах (устная фронтальная работа с менее подготовленными учащимися).

II уровень – самостоятельное решение задачи с последующей самопроверкой (остальными учащимися).

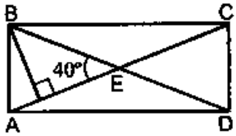


Рис. 199

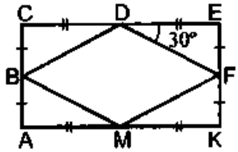


Рис. 200

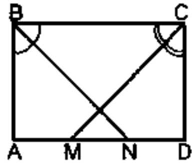


Рис. 201

Решение задачи второго уровня заранее готовится на переносной доске. Ученик, решивщий задачу, может подойти к доске и проверить правильность своего решения.

Задачи на готовых чертежах для I уровня

1. Рис. 199. $ABCD$ – прямоугольник.
   Найти: $\angle ABF$.
2. Рис. 200. $ACEK$ – прямоугольник, $BC = 5$ см.
   Найти: P_{BDFM}.
3. Рис. 201. $ABCD$ – прямоугольник.
   Доказать: $AM = ND$.
4. Рис. 202. $ABCD$ – прямоугольник.
   Найти: $\angle AOB$, $\angle BOC$.
5. Рис. 203. $ABCD$ – прямоугольник.
   Найти: AC, AB.
6. Рис. 204. $ABCD$ – прямоугольник.
   Найти: AD.

Задача для II уровня

Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает большую сторону прямоугольника под углом 60°. Отрезок этой прямой, заключенный внутри прямоугольника, равен 10. Найдите большую сторону прямоугольника.

Решение (рис. 205):

а) $\Delta BMO = \Delta DNO$ по катету и прилежащему к нему острому углу ($BO = DO$, $\angle MBO = \angle NDO = 30°$), тогда $OM = ON = MN : 2 = 10 : 2 = 5$ см.

б) ΔBOM – прямоугольный, в нем $BM = 2 \cdot OM = 2 \cdot 5 = 10$ см.

в) Прямоугольные треугольники BMO и DOM равны по двум катетам, тогда $DM = BM = 10$ (см), $\angle DMO = \angle BMO = 60°$, откуда $\angle BMD = 120°$, $\angle DMC = 60°$.

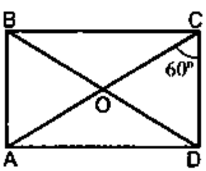


Рис. 202

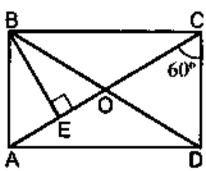


Рис. 203

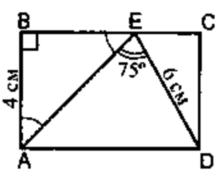


Рис. 204

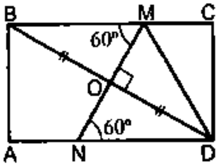


Рис. 205

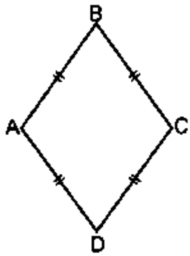


Рис. 206

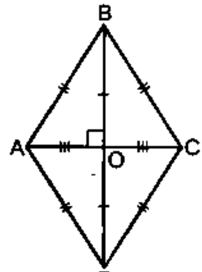


Рис. 207

г) В прямоугольном ΔDMC $\angle DMC = 60°$, $\angle MDC = 30°$, $MD = 10$ см, тогда $MC = 5$ см.

д) $BC = BM + MC = 10 + 5 = 15$ см.

Ответ: 15 см.

IV. Изучение нового материала

Понятие ромба

Ввести понятие ромба.

Рисунок (рис. 206) и записи на доске и в тетрадях учащихся:

***ABCD* – ромб, если *ABCD* – параллелограмм и $AB = BC = CD = DA$.**

– Верно ли утверждение: «Четырехугольник, у которого все стороны равны, является ромбом»?

Свойства ромба, признак ромба

– Перечислите все свойства ромба как частного вида параллелограмма.

– Выясните, каким еще свойством обладают диагонали ромба кроме того, что они точкой пересечения делятся пополам.

(Работа в группах с последующим обсуждением свойства диагоналей ромба.)

На доске и в тетрадях записать:

Свойства ромба (рис. 207)

Если $ABCD$ – ромб, то:

а) $AB = BC = CD = AD$;

б) $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$;

в) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$;

г) $AO = OC$, $BO = OD$;

д) $AC \perp BD$.

AO, BO, CO, DO – биссектрисы углов A, B, C, D.

– Сформулируйте утверждение, обратное особому свойству ромба, и выясните его справедливость.

(Работа в группах с последующим обсуждением.)

Определение квадрата

Ввести определение квадрата.

Рисунок (рис. 208) и записи на доске и в тетрадях:

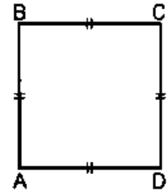


Рис. 208

***ABCD* – квадрат, если *ABCD* – прямоугольник и *AB* = *BC* = *CD* = *DA*.**

– Верно ли утверждение: «Ромб, у которого все углы прямые, является квадратом?»
– Верно ли утверждение: «Параллелограмм, у которого все стороны и все углы равны, является квадратом?»

Рассмотреть свойства квадрата, признаки квадрата

– Перечислите свойства квадрата, учитывая, что квадрат – это частный вид прямоугольника и ромба.

Записать на доске и в тетрадях:

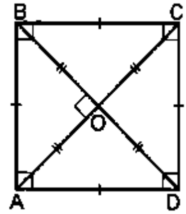


Рис. 209

Свойства квадрата (рис. 209)

а) $AB = BC = CD = AD$; $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$;
б) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$;
в) $BO = CO = DO = AO$, $BD \perp AC$.

AO, BO, CO, DO – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ соответственно.

– Сформулируйте признаки квадрата.

V. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: задача № 24. (Учащиеся работают самостоятельно, затем один из учащихся читает свое решение, остальные проверяют, исправляют ошибки.)

Ответ к задаче № 24: $P_{ABCD} = 60$ см.

2. Решить задачу № 406 на доске и в тетрадях. Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 406

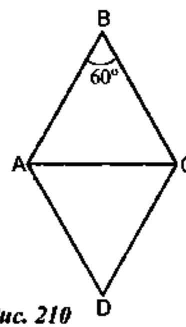


Рис. 210

Дано: $ABCD$ – ромб, $\angle B = 60°$, $AC = 10{,}5$ см (рис. 210).

Найти: P_{ABCD}.

Решение: $\angle B = 60°$, $AB = BC$ (т. к. AB и BC стороны ромба), тогда $\angle BAC = \angle BCA = 60°$, т. е. ΔABC – равносторонний и $AB = AC = 10{,}5$ см. У ромба все стороны равны, поэтому $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 10{,}5 = 42$ см.

Ответ: 42 см.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о треугольнике ABC? Почему?
– Чему равен периметр ромба?

3. Решить самостоятельно задачи № 407, 412.

Учитель оказывает индивидуальную помощь по необходимости, проверяет правильность решения задач у менее подготовленных учащихся.

Задача № 407

Решение (рис. 211):

$\angle ABC = 45°$.

BD – диагональ и биссектриса $\angle ABC$.

$\angle ABD = 1/2 \cdot 45° = 22°30'$.

Из ΔABO ($\angle O = 90°$, т. к. диагонали ромба перпендикулярны).

$\angle OAB = 90° - 22°30' = 67°30'$.

Ответ: $22°30'$, $67°30'$.

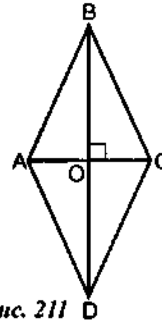


Рис. 211

Наводящие вопросы:

– Как найти угол между стороной AB и диагональю BD? Почему?
– А между стороной BC и диагональю BD?
– Какие еще углы равны двум предыдущим?
– Что вы можете сказать о треугольнике AOB?
– Как можно вычислить $\angle OAB$?
– Чему равны углы между сторонами ромба и диагональю AC?

Задача № 412

Решение (рис. 212):

ΔABC – равнобедренный, значит $\angle A = \angle B = 45°$.

В ΔADE $\angle D = 90°$, $\angle A = 45°$, тогда $\angle E = 45° \Rightarrow \Delta ADE$ – равнобедренный, т. е. $AD = DE$.

$CDEF$ – квадрат, следовательно, $CD = DE = EF = FC$.

Т. к. $AC = 12$ см, $DE = AD = CD$, то $CD = 6$ см $\Rightarrow P_{CDEF} = 4 \cdot CD = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

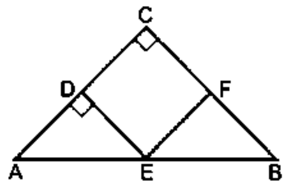


Рис. 212

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о треугольнике ADE?
– Как найти сторону квадрата $CDEF$?

Дополнительная задача

Перпендикуляр, опущенный из вершины угла A прямоугольника $ABCD$ на не проходящую через эту вершину диагональ, делит ее в отношении 1 : 3, считая от вершины B. Диагональ прямоугольника равна 8 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до большей стороны.

Решение (рис. 213):

$BK : KD = 1 : 3$, $BD = 8$ см $\Rightarrow BK = 2$ см.

Т. к. $BO = 1/2\ BD = 4$ см, то $KO = BO - BK = 2$ см, т. е. $BK = KO$.

$\Delta ABK = \Delta AOK$ по двум сторонам и углу между ними ($BK = KO$, AK – общая сторона, $\angle BKA = \angle OKA = 90°$), тогда, $AB = AO = BO = 4$ см $\Rightarrow \Delta AOB$ – равносторонний, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle O = 60°$.

В ΔOBE $\angle E = 90°$, $\angle OBE = \angle ABC - \angle ABO = 90° - 60° = 30° \Rightarrow OE = 1/2BO = 2$ см.

Ответ: 2 см.

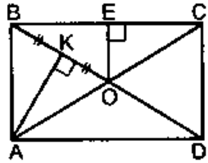


Рис. 213

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 46, вопросы 14, 15; решить задачи № 405, 409, 411.

Дополнительная задача

На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ – ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника равна 3.

Урок 13
Решение задач

Цели урока:

- Закрепить теоретический материал по теме «Прямоугольник. Ромб. Квадрат».
- Совершенствовать навыки решения задач по теме.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Теоретическая самостоятельная работа

Заполнить таблицу, отметив знаки + (да) и – (нет). Один из учащихся работает на переносной доске, остальные в своих тетрадях. После завершения работы класс проверяет работу, выполненную на переносной доске.

	параллелограмм	прямоугольник	ромб	квадрат
1. Противолежащие стороны параллельны и равны				
2. Все стороны равны				
3. Противолежащие углы равны, сумма соседних углов равна 180°				
4. Все углы прямые				
5. Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам				

	паралле-лограмм	прямо-угольник	ромб	квадрат
6. Диагонали равны				
7. Диагонали взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов				

Правильные ответы:

	параллелограмм	прямоугольник	ромб	квадрат
1.	+	+	+	+
2.	–	–	+	+
3.	+	+	+	+
4.	–	+	–	+
5.	+	+	+	+
6.	–	+	–	+
7.	–	–	+	+

III. Проверочный тест

Тесты в двух вариантах в распечатанном виде раздаются учащимся. Ответы нужно записать на листочках и в тетрадях: листочки сдаются на проверку учителю; ответы в тетради проверяют сами учащиеся по заранее подготовленным ответам на обороте доски.

I вариант

1. Любой прямоугольник является:
   а) ромбом;
   б) квадратом;
   в) параллелограммом;
   г) нет правильного ответа.
2. Если в четырехугольнике диагонали перпендикулярны, то этот четырехугольник – ...
   а) ромб;
   б) квадрат;
   в) прямоугольник;
   г) нет правильного ответа.
3. Ромб – это четырехугольник, в котором ...
   а) диагонали точкой пересечения делятся пополам и равны;
   б) диагонали взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;
   в) противолежащие углы равны, а противолежащие стороны параллельны;
   г) нет правильного ответа.

II вариант

1. Любой ромб является:
   а) квадратом;
   б) прямоугольником;
   в) параллелограммом;
   г) нет правильного ответа.
2. Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм:
   а) ромб;
   б) квадрат;
   в) прямоугольник;
   г) нет правильного ответа.
3. Прямоугольник – это четырехугольник, в котором:
   а) противолежащие стороны параллельны, а диагонали равны;
   б) диагонали точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов;
   в) два угла прямые и две стороны равны;
   г) нет правильного ответа.

Ответы к тесту:

I вариант: 1 в); 2 г); 3 б).

II вариант: 1 в); 2 а); 3 а).

IV. Проверка домашнего задания

Один из учащихся готовит на доске решение дополнительной домашней задачи на этапе теоретической самостоятельной работы. Учащиеся, справившиеся с решением задачи, проверяют свое решение. Задание для учащихся, не справившихся с дополнительной домашней задачей: внимательно выслушать решение задачи и разобраться в плане решения задачи.

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AB = 3$, $K \in AB$, $M \in CD$, $\angle KAC = 30°$, $AKCM$ – ромб.

Найти: AK.

Решение (рис. 214):

а) $AKCM$ – ромб, тогда $AK = KC$, ΔAKC – равнобедренный, значит $\angle KCA = \angle KAC = 30°$, $\angle AKC = 120°$, $\angle BKC = 60°$.

б) ΔKBC – прямоугольный, в нем $\angle BKC = 60°$, $\angle KCB = 30°$, тогда $KB = KC : 2 = AK : 2$.

в) Т. к. $KB = AK : 2$, $AB = AK + KB = AK + AK : 2 = 3 \cdot AK : 2 = 3$, то $AK = 2$.

Ответ: $AK = 2$.

Контролирующие вопросы:

– Зачем нужно находить $\angle BKC$?
– Почему $KB = 1/2\ AK$?
– Почему $AB = 3/2\ AK$?

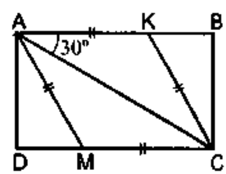


Рис. 214

V. Решение задач

1. Решить задачу № 413 в) на доске и в тетрадях.

Задача 413 в)

Дано: α – угол между диагоналями, *a* – диагональ прямоугольника (рис. 215 а).

Построить: прямоугольник.

Анализ (проводится в виде беседы учителя с учащимися):

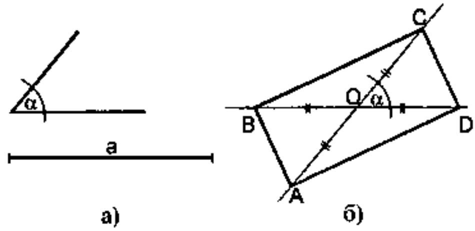


Рис. 189

– Предположим, такой прямоугольник построен. Назовем его *ABCD*, в нем $AC = BD = a$, $\angle COD = \alpha$ (см. рис. 215 б).

– Составьте план построения искомого прямоугольника.

Далее один из учащихся вызывается к доске для построения искомого прямоугольника, остальные учащиеся работают в тетрадях.

Построение (рис. 215 б):

1) В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам.
2) Строим угол α с вершиной в точке *O* и, продлив каждую из сторон, откладываем во все стороны отрезки, равные половине диагонали.
3) *ABCD* – искомый прямоугольник.

Далее решить самостоятельно задачи № 414 а), 413 б).

VI. Самостоятельная работа обучающего характера

При выполнении работы учитель контролирует работу менее подготовленных учащихся, оказывая при этом необходимую индивидуальную помощь.

По окончании работы проводится самопроверка. Самопроверку можно осуществить следующим образом:

I способ – заранее подготовить решение на распечатанных листочках и по окончании работы раздать листочки каждому ученику, ученик проверяет свое решение, исправляет ошибки.

II способ – по окончании работы объявить ответы к задачам, ученик должен найти свои ошибки в случае расхождения его ответов от верных.

I уровень

1. Найдите углы ромба, если его диагонали составляют с его стороной углы, один из которых на 30° меньше другого.
2. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите углы между диагональю прямоугольника и его сторонами.

II уровень

1. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла BAC пересекает сторону BC и диагональ BD соответственно в точках M и N. Найдите угол ANB, если $\angle AMC = 120°$.
2. Через точку пересечения диагоналей квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами еще одного квадрата.

Решение задач самостоятельной работы

I уровень

1. Рис. 216.

   Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, поэтому ΔAOB – прямоугольный. Пусть в ΔAOB $\angle ABO = x$, тогда $\angle BAO = x + 30°$, значит $\angle ABO + \angle BAO = x + x + 30° = 90°$, и $x = 30°$.

   $\angle ABO = 30°$, $\angle BAO = 60°$, а т. к. диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то $\angle BAD = 120°$, $\angle ABC = 60°$.

   Поскольку противолежащие углы в ромбе равны, то $\angle ADC =$ $= \angle ABC = 60°$, $\angle BCD = \angle BAD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

2. Рис. 217. Диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам, значит $BO = BD/2 = AC/2 = AO$ и ΔAOB – равнобедренный, тогда $\angle OAB = \angle OBA = 50°$.

   В прямоугольнике все углы прямые, тогда:

   $\angle OAD = \angle BAD - \angle OAB = 90° - 50° = 40°$.

Ответ: 50°, 40°.

II уровень

1. Рис. 218. В ромбе противолежащие углы равны и диагонали являются биссектрисами его углов,

   т. е. $\angle BAC = \angle BAD : 2 = \angle BCD : 2 = \angle BCA$.

   Т. к. AM – биссектриса $\angle BAC$, а $\angle BAC = \angle BCA$, то $\angle MAC =$ $= \angle MCA : 2$.

   В ΔAMC $\angle MAC + \angle MCA = 180° - \angle AMC = 180° - 120° = 60°$.

   $\angle MAC = \angle MCA : 2$, тогда $\angle MAC = 20°$, $\angle BAC = 40°$.

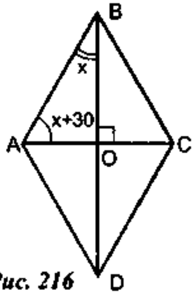


Рис. 216

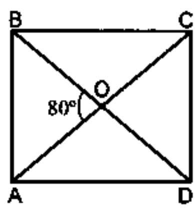


Рис. 217

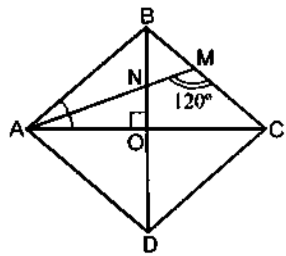


Рис. 218

В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны, ΔAOB – прямоугольный, $\angle ABO = 90° - \angle BAO = 50°$.

В ΔABN $\angle BAN = \angle MAC = 20°$, $\angle ABN = 50°$,

тогда $\angle ANB = 180° - (20° + 50°) = 110°$.

Ответ: $\angle ANB = 110°$.

2. Рис. 219. $\Delta BMO = \Delta DKO$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BO = DO$, $\angle MBO = \angle KDO = 45°$, $\angle BOM = \angle DOM$), тогда $BM = KD$, значит $AM = CK$ ($AM = AB - BM$, $CK = CD - KD$, $BM = KD$, $AB = CD$), $OM = OK$.

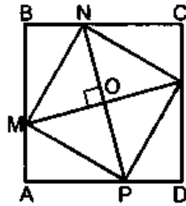


Рис. 219

Из равенства ΔCON и ΔAOP аналогично получаем $CN = AP$, $BN = PD$, $ON = OP$.

В четырехугольнике $MNKP$ диагонали взаимно перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам ($OM = OK$, $ON = OP$), тогда $MNKP$ – ромб.

$\Delta AMO = \Delta DOP = \Delta COK = \Delta BON$ по двум сторонам и углу между ними ($OA = OD = OC = OB$, $AM = PD = KC = BN$, $\angle MAO = \angle PDO = \angle KCO = \angle NBO$), тогда $MO = PO = OK = NO$.

В ромбе $MNKP$ диагонали равны ($MK = MO + OK = NO + PO = NP$), значит $MNKP$ – квадрат.

VII. Подведение итогов урока

Выставить оценки за работу на уроке и выполнение домашнего задания.

Домашнее задание

Изучить самостоятельно п. 47, вопросы 16–20;

Решить задачи № 415 б), 413 а), 410.

Дополнительная задача: Докажите, что биссектрисы всех четырех углов прямоугольника (не являющегося квадратом) при пересечении образуют квадрат.

Урок 14
Осевая и центральная симметрии

Цели урока:

- Рассмотреть осевую и центральную симметрии как свойства некоторых геометрических фигур.
- Научить строить симметричные точки и распознавать фигуры, обладающие осевой симметрией и центральной симметрией.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания

(Проверка выполняется индивидуально во время решения задач на готовых чертежах.)

Решение дополнительной домашней задачи (рис. 220):

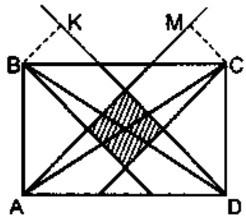


Рис. 220

Поскольку биссектрисы смежных углов параллелограмма пересекаются под прямым углом, в пересечении образуется прямоугольник. Опустим из вершин B и C прямоугольника $ABCD$ перпендикуляры BK и CM на биссектрисы углов D и A соответственно. Из равенства прямоугольных треугольников AMC и DKB по гипотенузе и острому углу следует, что $MC = KB$. Длины этих отрезков – это расстояния между биссектрисами противоположных углов данного прямоугольника, т. е. длины сторон прямоугольника, образованного пересечениями биссектрис. Следовательно, стороны полученного прямоугольника равны между собой, т. е. это квадрат.

Решение задач на готовых чертежах

Задачи решаются самостоятельно с последующей проверкой.

1. Рис. 221. $ABCD$ – ромб.
   Найти: $MD + DN$.
2. Рис. 222. $ABCD$ – ромб.
   Найти: $\angle CBE$.
3. Рис. 223. $ABCD$ – ромб.
   Найти: $\angle BAD$.
4. Рис. 224. $ABCD$ – ромб.
   Найти: $\angle ABC$.
5. Рис. 225. $ABCD$ – ромб.
   Найти: $\angle C$.
6. Рис. 226. $ABCD$ – квадрат, $PK = 2$ см, $AK = \sqrt{3}$ см.
   Найти: P_{ABCD}.

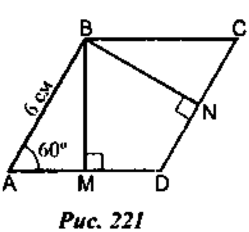


Рис. 221

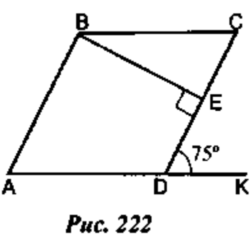


Рис. 222

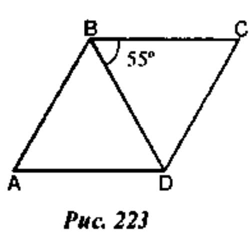


Рис. 223

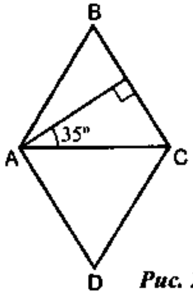


Рис. 224

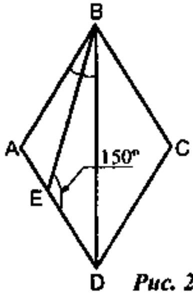


Рис. 225

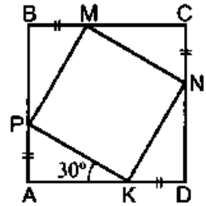


Рис. 226

Ответы к задачам на готовых чертежах:

1. $MD + DN = 6$ см.
2. $\angle CBE = 15°$.
3. $\angle BAD = 70°$.
4. $\angle ABC = 70°$.
5. $\angle C = 140°$.
6. $P_{ABCD} = 4 \cdot (\sqrt{3} + 1)$ см.

III. Изучение нового материала

Осевая и центральная симметрии

Обсуждение темы проводится по вопросам 16–20.

Закрепление темы «Осевая и центральная симметрии» – в процессе решения задач:

1. Задачи из рабочей тетради № 25, 26. (Самостоятельно с последующей самопроверкой.)
2. Задачи № 418, 423 – устно.
3. Задачи № 416, 421 – на доске и в тетрадях. (Один из учащихся вызывается к доске.)
4. Задачи № 417, 422 – устно.

IV. Самостоятельная работа проверочного характера

I уровень

I вариант

1. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. E – середина стороны AB, $\angle BAC = 50°$. Найдите угол EOD.
2. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\angle A = 31°$. Найдите углы треугольника BOC.
3. Дан отрезок, равный перпендикуляру, опущенному из вершины некоторого квадрата на диагональ. Постройте этот квадрат.

II вариант

1. В прямоугольнике $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O. Отрезок OA является высотой треугольника MOP, $\angle AOP = 15°$. Найдите $\angle OHK$.

2. В ромбе $MPKH$ диагонали пересекаются в точке E. Один из углов треугольника PKE равен 16°30'. Найдите остальные углы этого треугольника и угол PMH.
3. Дан отрезок, равный перпендикуляру, проведенный из точки пересечения диагоналей некоторого квадрата на его сторону. Постройте этот квадрат.

II уровень

I вариант

1. В прямоугольнике $ABCD$ O – точка пересечения диагоналей, BH и DE – высоты треугольников ABO и COD соответственно, $\angle BOH = 60°$, $AH = 5$ см. Найдите OE.
2. В ромбе $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. OM, OK, OE – перпендикуляры, опущенные на стороны AB, BC, CD соответственно. Докажите, что $OM = OK$, и найдите сумму углов MOB и COE.
3. Внутри данного острого угла постройте квадрат с данной стороной так, чтобы две вершины квадрата принадлежали одной стороне угла, а третья – другой.

II вариант

1. В прямоугольнике $MPKH$ O – точка пересечения диагоналей, PA и HB – перпендикуляры, проведенные из вершин P и H к прямой MK. Известно, что $MA = OB$. Найдите угол POM.
2. В ромбе $MPKH$ диагонали пересекаются в точке O. На сторонах MK, KH, PH взяты точки A, B, C соответственно, $AK = KB = PC$. Докажите, что $OA = OB$, и найдите сумму углов POC и MOA.
3. Постройте вадрат по данной диагонали так, чтобы две противоположные вершины этого квадрата лежали на разных сторонах данного острого угла.

III уровень

I вариант

1. В прямоугольнике $ABCD$ точки M и K – середины сторон AB и AD соответственно. На прямой AC взята точка P, на прямой BD – точка E, $MP \perp AC$, $KE \perp BD$. Известно, что $4KE = AD$. Найдите отношения сторон $AP : PC$.
2. В ромбе $ABCD$ угол B тупой. На стороне AD взята точка K, $BK \perp AD$. Прямые BK и AC пересекаются в точке O, $AC = 2BK$. Найдите угол AOB.
3. Постройте прямоугольник по углу между стороной и диагональю и перпендикуляру, проведенному из вершины прямоугольника к прямой, содержащей эту диагональ.

II вариант

1. В прямоугольнике $MPKH$ O – точка пересечения диагоналей. Точки A и B – середины сторон MP и MH соответственно.

Точка C делит отрезок MK в отношении 1 : 7, считая от точки M, $AC \perp MK$. Найдите отношение $BO : PH$.

2. В ромбе $MPKH$ угол M острый. Отрезок PE является перпендикуляром к прямой MK, O – точка пересечения диагоналей, T – общая точка прямых PE и MH, $\angle MTP = 120°$, $OH = a$. Найдите PE.
3. Постройте ромб по острому углу и отрезку, длина которого равна расстоянию между прямыми, содержащими противоположные стороны ромба.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи:

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Смежные стороны параллелограмма равны 10 см и 15 см. Найдите разность периметров ΔAOB и ΔAOD.
2. В параллелограмме $ABCD$ угол C равен 45°. Диагональ BD перпендикулярна AB и равна 7 см. Найдите DC.
3. Диагональ AC параллелограмма $ABCD$ равна 9 см. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямые BC и AD соответственно.
4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке N_1. На прямых AB и CD взяты точки F и Q так, что B лежит между A и F , а C между D и Q. Биссектрисы углов FBC и BCQ пересекаются в точке N_2. Длина отрезка N_1N_2 равна 12 см. Найдите длину BN_2, если $\angle BN_1C = 60°$.

Урок 15
Решение задач

Цели урока:

- Закрепить в процессе решения задач полученные знания и навыки, подготовить учащихся к контрольной работе.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания

На доске заранее подготовить рисунки к задачам.

Вызвать к доске ученика, который ознакомит класс с решением задачи, используя подготовленный рисунок. Далее идет обсуждение

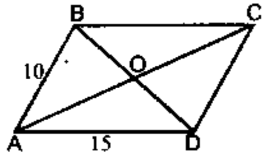


Рис. 227

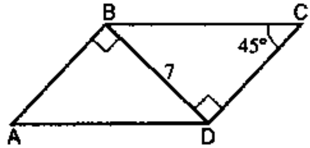


Рис. 228

правильности решения задачи: учащиеся оценивают решение, исправляют ошибки, предлагают другие способы решения.

Таким образом, проверяются все домашние задачи.

1. Рис. 227.

В параллелограмме диагонали точкой пересечения делятся пополам, т. е. $BO = DO$, $AO = CO$, тогда $P_{AOD} - P_{AOB} = (AD + AO + DO) - (AB + AO + BO) = (AD - AB) + (AO - AO) + (DO - BO) = AD - AB = 15 - 10 = 5$ (см).

Ответ: 5 см.

2. Рис. 228.

Т. к. $BD \perp AB$, а $AB \parallel DC$ как противоположные стороны параллелограмма, то $BD \perp DC$, тогда ΔBDC – прямоугольный, $\angle DBC = 90° - \angle C = 45°$.

$\angle DBC = \angle C$, значит ΔDBC – равнобедренный и $DC = BD = 7$ см.

Ответ: 7 см.

3. Рис. 229.

В параллелограмме $ABCD$ $AD \parallel BC$.

$AK \perp BC$, значит $AK \perp AD$, тогда $\angle KAN = 90°$.

$CN \perp AD$, значит $CN \perp BC$, тогда $\angle KCN = 90°$.

$AKCN$ – параллелограмм ($AD \parallel BC$, $AK \parallel CN$, т. к. $AK \perp AD$, $CN \perp AD$), в нем все углы прямые, значит, $AKCN$ – прямоугольник и диагонали $AKCN$ равны, т. е. $KN = AC = 9$ см.

Ответ: 9 см.

4. Рис. 230.

а) $\angle FBC$ и $\angle ABC$ – смежные, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, тогда $\angle N_2BN_1 = 90°$.

б) Таким же образом $\angle N_2CN_1 = 90°$.

в) ΔBN_2C – равнобедренный, т. к. $\angle N_2BC = \angle N_2CB$, тогда $BN_2 = CN_2$.

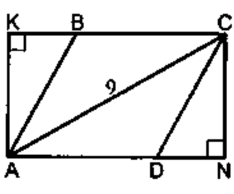


Рис. 229

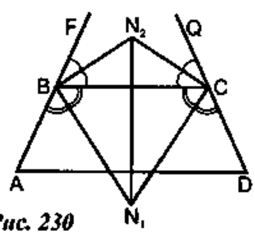


Рис. 230

г) Прямоугольные ΔBN_2N_1 и ΔCN_2N_1 равны по катету и гипотенузе, тогда $\angle BN_1N_2 = \angle CN_1N_2 = 30°$.

д) В ΔBN_2N_1 $\angle N_2BN_1 = 90°$, $\angle BN_1N_2 = 30°$, $N_1N_2 = 12$ см, значит $BN_2 = 6$ см.

Ответ: 6 см.

III. Решение задач

I уровень – решить на доске и в тетрадях задачи № 1, № 2. (Эти задачи решаются менее подготовленными учащимися. К доске вызывается один ученик, идет полный разбор задачи.)

II уровень – решить самостоятельно задачи № 3, № 4 с последующей проверкой. (Проверка осуществляется учителем во время выполнения работы над ошибками.)

Задачи

1. Диагонали ромба *KMNP* пересекаются в точке *O*. Найдите углы треугольника *KOM*, если угол *MNP* равен 80°. (*Ответ*: 90°, 40°, 50°.)

2. В параллелограмме *KMNP* проведена биссектриса угла *MKP*, которая пересекает сторону *MN* в точке *E*. а) Докажите, что треугольник *KME* равнобедренный. б) Найдите сторону *KP*, если *ME* = = 10 см, а периметр параллелограмма равен 52 см. (*Ответ*: 16 см.)

3. Через вершину *C* прямоугольника *ABCD* проведена прямая, параллельная диагонали *BD* и пересекающая прямую *AB* в точке *M*. Через точку *M* проведена прямая, параллельная диагонали *AC* и пересекающая прямую *BC* в точке *N*. Найдите периметр четырехугольника *ACMN*, если диагональ *BD* равна 8 см. (*Ответ*: 32 см.)

4. Биссектрисы углов *A* и *D* параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *M*, лежащей на стороне *BC*. Луч *DM* пересекает прямую *AB* в точке *N*. Найдите периметр параллелограмма *ABCD*, если *AN* = 10 см. (*Ответ*: 30 см.)

IV. Анализ самостоятельной работы

1. Общий анализ самостоятельной работы.
2. Разбор заданий, с которыми не справилось большинство.
3. Работа над ошибками с использованием по необходимости готовых ответов и указаний к задачам самостоятельной работы.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

(Подготовить в распечатанном виде для каждого ученика.)

I уровень

I вариант

1. Рис. 231.

а) Докажи, что ΔABO равнобедренный и *OE* в нем медиана, высота и биссектриса.

б) Найди $\angle EOA = 40°$, $\angle BOA = 80°$, $\angle AOD = 100°$.

в) $\angle EOD = \angle EOA + \angle AOD = 140°$.

Ответ: 140°.

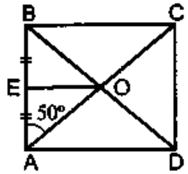


Рис. 231

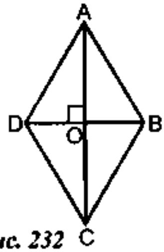


Рис. 232

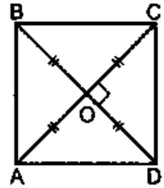


Рис. 233

2. Рис. 232.

а) $\angle A = \angle C = 31°$; CO – биссектриса $\angle C$, $\angle OCB = 15°30'$;

б) ΔCOB – прямоугольный, $\angle BOC = 90°$, $\angle OCB = 15°30'$, $\angle OBC = 74°30'$.

Ответ: 90°, 15°30', 74°30'.

3. Рис. 233. Диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны, поэтому данный по условию задачи отрезок – это $BO = DO = AO = CO$. Поэтому:

а) построй прямые a и b так, что $a \perp b$, $a \cap b = O$;

б) от точки O на прямых a и b отложи отрезки AO, BO, CO, DO, равные данному отрезку;

в) соедини точки A, B, C, D отрезками и получишь искомый квадрат $ABCD$.

II вариант

1. Рис. 234.

а) Докажи, что ΔPMO равнобедренный и OA в нем высота и биссектриса.

б) Найди $\angle PAM = 30°$, $\angle OPM = 75°$.

в) Докажи, что $\angle OPM = \angle OHK$.

Ответ: $\angle OHK = 75°$.

2. Рис. 235.

а) $\angle PKE = 90° - 16°30' = 73°30'$.

б) $\angle PKH = 73°30' \cdot 2 = 147°$.

в) $\angle PMH = 147°$.

Ответ: 147°.

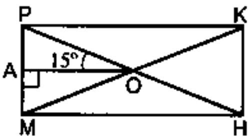


Рис. 234

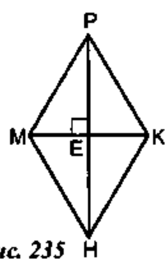


Рис. 235

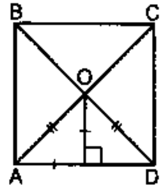


Рис. 236

3. Рис. 236.
Диагонали квадрата равны, точкой пересечения делятся пополам и являются биссектрисами его углов.
Можно доказать, что $OE = AD/2$ (см. рисунок). Поэтому:
а) построй прямые a и b так, что $a \perp b$, $a \cap b = A$.
б) от точки A на прямых a и b отложи отрезки AB и AD, равные двум данным по условию задачи отрезкам.
в) через точки A и B построй прямые, параллельные a и b, точку пересечения обозначь C.
$ABCD$ – искомый квадрат.

II уровень

I вариант

1. Рис. 237.
а) Докажи, что ΔABO равносторонний и высота BH является медианой, тогда $OH = 5$ см.
б) Докажи, что $\Delta OBH = \Delta ODE$ и $OH = OE = 5$ см.

Ответ: $OE = 5$ см.

2. Рис. 238.
а) $\Delta AMO = \Delta CKO$ по гипотенузе и острому углу, следовательно, $OM = OK$.
б) $\angle MOB + \angle COE = \angle MOB + \angle MOA = 90°$ (докажи, что $\angle COE = \angle MOA$).
3. Рис. 239.
PQ – сторона квадрата. Построй прямую a, удаленную от стороны угла на расстояние, равное PQ. Далее см. рисунок.

II вариант

1. Рис. 240.
а) Докажи, что $\Delta PAO = \Delta HBO$ и $OA = OB$.
б) Докажи, что $\Delta MPA = \Delta KHB$ и $MA = BK$.
в) Докажи, что ΔPOM – равносторонний.

Ответ: $\angle POM = 60°$.

2. Рис. 241.
а) $\Delta AOK = \Delta BOK$ по двум сторонам и углу между ними, тогда $OA = OB$.

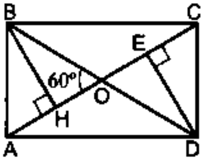


Рис. 237

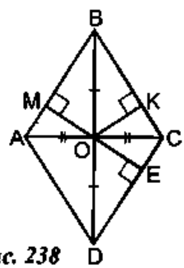


Рис. 238

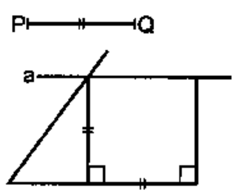


Рис. 239

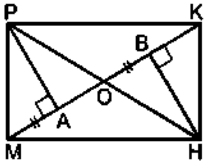


Рис. 240

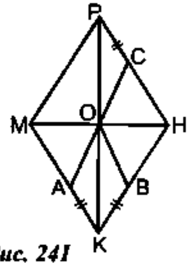


Рис. 241

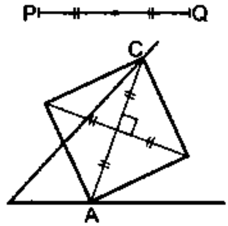


Рис. 242

б) $\angle POC + \angle MOA = \angle POC + \angle COH = 90°$ (докажи, что $\angle MOA = \angle COH$).

3. Рис. 242.

PQ – диагональ квадрата. Отметить точку A на одной стороне угла и точку C на другой так, что $AC = PQ$.

Далее см. рисунок.

III уровень

I вариант

1. Рис. 243.

а) $4KE = AD$, тогда $2KE = KD$, $\angle EDK = 30°$.

б) $AB = BD : 2 = AC : 2$.

в) $AM = AB : 2 = AC : 4$.

г) $AP = AM : 2 = AC : 8$. $AP : PC = 1 : 7$

Ответ: $AP : PC = 1 : 7$.

2. Рис. 244.

а) Проведем $AE \perp AD$, тогда $KB = AE$, $AC = 2AE$, $\angle ACE = 30°$.

б) $\angle COB = 60°$, $\angle AOB = 120°$.

Ответ: $\angle AOB = 120°$.

3. Рис. 245.

$\angle(hk)$ – угол между стороной и диагональю, PQ – перпендикуляр, проведенный из вершины прямоугольника к прямой, содержащей диагональ.

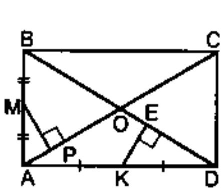


Рис. 243

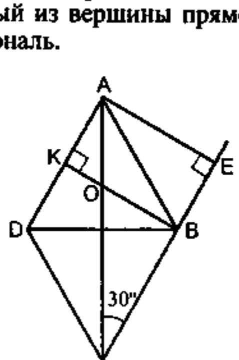


Рис. 244

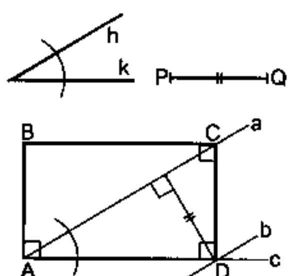


Рис. 245

а) $\angle A = \angle(hk)$

б) $b \parallel a$, расстояние между a и b равно PQ.

в) $b \cap c = D$

г) $DC \perp AD$, $DC \cap a = C$.

д) $CB \perp DC$, $AB \perp AD$, $AB \cap CB = B$.

$ABCD$ – искомый прямоугольник.

II вариант

1. Рис. 246.
   а) $MC = MK : 8 = MO : 4$.
   б) Проведем $PE \parallel AC$. По теореме Фалеса $MC = CE$, $ME = MO : 2$.
   в) $\Delta MPE = \Delta OPE$, ΔPMO – равносторонний, $\angle PMO = 60°$, $\angle PHM = 30°$.
   г) $BO : HO = 1 : 2$, тогда $BO : PH = 1 : 4$.

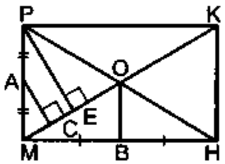


Рис. 246

2. Рис. 247.
   а) Проведем $MS \perp KM$, $PE = MS$.
   б) В ΔPTH $\angle THP = 30°$.
   в) В ΔMSH $\angle S = 90°$, $\angle MHS = 30°$, $MH = 2a$, тогда $MS = a$.

Ответ: $PE = a$.

3. Рис. 248.
   $\angle(hk)$ – острый угол ромба; PQ – отрезок, равный расстоянию между противоположными сторонами ромба.
   а) $\angle(Ab) = \angle A = \angle(hk)$
   б) $c \parallel a$, расстояние между a и c равно PQ.
   в) $b \cap c = D$
   г) $AB = AD$, $DC = AD$, $B \in a$, $C \in c$.

$ABCD$ – искомый ромб.

V. Подведение итогов урока

Выставить оценки за выполнение домашнего задания и работу на уроке.

Домашнее задание

Решить задачи (полуустно)

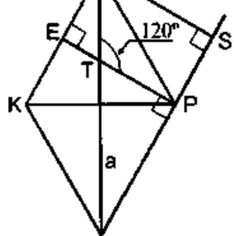


Рис. 247

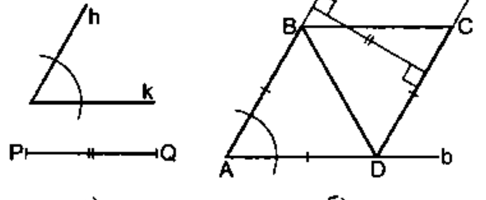


Рис. 248

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$ $\angle A = 30°$. На стороне BC взята точка E так, что $\angle CDE = 60°$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является прямоугольной трапецией.
2. На сторонах AB, BC, CD и AD ромба $ABCD$ взяты точки P, K, H, M соответственно. Каждая из прямых PM, KH, PK параллельна одной из осей симметрии ромба. Диагональ AC пересекает отрезок PM в точке E, а отрезок KH в точке T.
   а) Докажите, что диагонали четырехугольника $EKPT$ равны.
   б) Определите вид выпуклого четырехугольника $MPKH$.
3. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка M так, что $DM = DC$.
   а) Докажите, что CM – биссектриса угла C параллелограмма.
   б) Найдите периметр параллелограмма, если AB = 8,5 см, AM = 3,5 см.
4. Постройте ромб по диагонали и углу ромба, противолежащему этой диагонали.
5. AC – диагональ параллелограмма $ABCD$. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K, а биссектриса угла ACD пересекает сторону AD в точке P. Докажите, что $APCK$ – параллелограмм.

Урок 16

Контрольная работа № 1 по теме «Четырехугольники»

Цель урока:

- Проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Четырехугольники».

Ход урока

I. Организационный момент

II. Выполнение контрольной работы

Текст контрольной работы – см. Приложение.

III. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился.

В конце урока для учащихся вывесить в кабинете на стенде краткую запись решения задач контрольной работы (условия задач контрольной работы в распечатанном виде выдаются учащимся на дом).

Решения задач контрольной работы

I уровень

I вариант

1. Рис. 249.
   В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому ΔABO равнобедренный ($AO = BO$) и $\angle ABO = \angle BAO = 36°$, тогда $\angle AOB = 108°$.

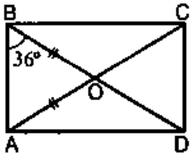


Рис. 249

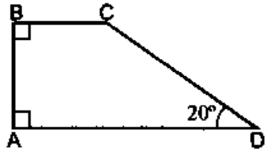


Рис. 250

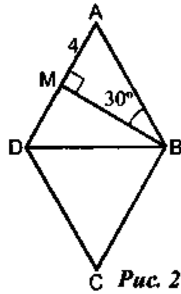


Рис. 251

$\angle AOD = 180° - \angle AOB = 72°$.

Ответ: $\angle AOD = 72°$.

2. Рис. 250.

$\angle D = 20°$, $\angle C = 180° - 20° = 160°$.

Ответ: 90°, 90°, 160°, 20°.

3. Пусть коэффициент пропорциональности равен x, тогда одна сторона параллелограмма равна x см, а другая – $2x$ см. Т. к. противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 30 см, то $x + 2x + x + 2x = 30$, $x = 5$.

Стороны параллелограмма равны 5 см, 10 см.

Ответ: 5 см, 10 см, 5 см, 10 см.

4. Углы при каждом основанин равнобокой трапеции равны; так как сума углов при большем основании равна 96°, то каждый нз этих углов равен 96° : 2 = 48°. Сумма соседних углов, взятых при разных основаниях, равна 180°, поэтому каждый угол прн меньшем основании равен: 180° – 48° = 132°.

Ответ: 48°, 48°, 132°, 132°.

5. Рис. 251.

ΔABM – прямоугольный, в нем $\angle ABM = 30°$, $AM = 4$ см, тогда $AB = 8$ см, $\angle BAM = 60°$.

ΔADB равносторонний, т. к. $\angle DAB = 60°$, $AD = AB$, тогда $\angle ADB = \angle ABD = 60°$, значит $DB = AD = AB = 6$ см.

Ответ: $DB = 6$ см.

II вариант

1. Рис. 252.

В прямоугольнике диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому $MO = NO$, ΔMNO – равнобедренный, $\angle NMO = \angle MNO = (180° - 64°) : 2 = 58°$.

Тогда $\angle OMP = 90° - \angle NMO = 32°$.

Ответ: $\angle OMP = 32°$.

2. Рис. 253.

В равнобокой трапеции углы при каждом основанин равны.

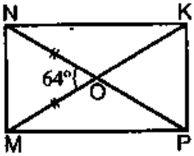


Рис. 252

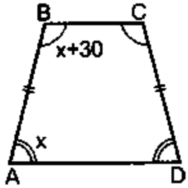


Рис. 253

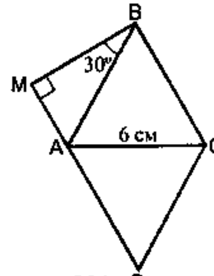


Рис. 254

$\angle A + \angle B = 180°$, тогда $x + x + 30 = 180$, $x = 75$. $\angle A = \angle D = 75°$, $\angle B = \angle C = 105°$.

Ответ: 75°, 105°, 105°, 75°.

3. Пусть коэффициент пропорциональности равен x, тогда одна сторона параллелограмма равна x см, а другая – $3x$ см. Т. к. противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 40 см, то $x + 3x + x + 3x = 40$, $x = 5$.

Стороны параллелограмма равны 5 см, 15 см.

Ответ: 5 см, 15 см, 5 см, 15 см.

4. Разность углов при одной из боковых сторон равна 48°, а их сумма – 180°, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 1 = \angle 2 + 48°$, откуда $(\angle 2 + 48°) + \angle 2 = 180°$, $\angle 2 = 66°$, $\angle 1 = 114°$.

Т. к. трапеция прямоугольная, то другая боковая сторона перпендикулярна основаниям и образует с ними углы по 90°.

Ответ: 66°, 114°, 90°, 90°.

5. Рис. 254.

Т. к. $BM \perp AD$, $AD \parallel BC$, то $BM \perp BC$, и $\angle ABC = 90° - 30° = 60°$.

В ΔABC $AB = BC$, $\angle ABC = 60°$, тогда $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 60°) : 2 = 60°$, значит треугольник ABC – равносторонний и $AB = AC = 6$ см.

В ΔABM $\angle M = 90°$, $\angle ABM = 30°$, $AB = 6$ см, значит $AM = 3$ см.

Ответ: $AM = 3$ см.

II уровень

I вариант

1. Пусть x см – одна из сторон параллелограмма, тогда другая сторона равна $x + 5$ (см).

Т. к. противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 50 см, то $x + (x + 5) + x + (x + 5) = 50$, откуда $x = 10$, т. е. стороны параллелограмма равны 10 см, 15 см, 10 см, 15 см.

Ответ: 10 см, 15 см, 10 см, 15 см.

2. Рис. 255.

Пусть k – коэффициент пропорциональности, тогда диагональ прямоугольника делит его углы так, что один из них равен $4k°$,

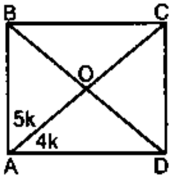


Рис. 255

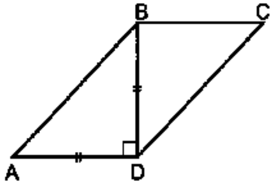


Рис. 256

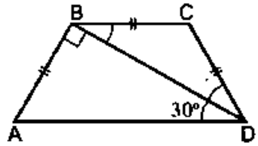


Рис. 257

а другой $5k°$. В прямоугольнике все углы прямые, тогда $4k + 5k = 90$, откуда $k = 10$, т. е. $\angle BAO = 50°$, $\angle DAO = 40°$. ΔABO – равнобедренный, т. к. $AO = AC/2 = BD/2 = BO$, и $\angle ABO = \angle BAO = 50°$, а $\angle AOB = 180° - (50° + 50°) = 80°$.

Ответ: 80°.

3. Рис. 256.

Диагональ BD является высотой и равна сторонам AD и BC. Тогда ΔABD – прямоугольный и равнобедренный, $\angle BAD = \angle ABD = 90° : 2 = 45°$.

Т. к. $BD \perp BC$, то $\angle ABC = 45° + 90° = 135°$. В параллелограмме противолежащие углы равны, тогда $\angle C = \angle A = 45°$, $\angle ADC = \angle ABC = 135°$.

Ответ: 45°, 135°, 45°, 135°.

4. Рис. 257.

а) $\angle BDA = \angle CBD = 30°$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей BD.
$\angle CBD = \angle CDB = 30°$, поэтому ΔBCD – равнобедренный с основанием BD, т. е. $BC = CD$.

б) В ΔABD $\angle ABD = 90°$, $\angle BDA = 30°$, тогда $\angle BAD = 60°$, тогда в трапеции $ABCD$ $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, т. е. она равнобедренная и $AB = CD$.

в) В ΔABD $AD = 2 \cdot AB$, т. к. $\angle ADB = 30°$, $\angle ABD = 90°$.

г) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 60$, но т. к. $AB = BC = CD$, а $AD = 2 \cdot AB$, то $AB + AB + AB + 2 \cdot AB = 60$, откуда $AB = 12$ см, $AD = 24$ см.

Ответ: $AD = 24$см.

5. Рис. 258.

а) Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны, поэтому $\angle BM_1C = 90°$.

б) $\angle KBC$ и $\angle PCB$ – односторонние при параллельных прямых AB и CD и секущей BC, поэтому биссектрисы углов KBC и PCB перпендикулярны, т. е. $\angle BM_2C = 90°$.

в) $\angle ABC$ и $\angle KBC$, $\angle DCB$ и $\angle PCB$ – смежные, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle M_2BM_1 = 90°$, $\angle M_2CM_1 = 90°$.

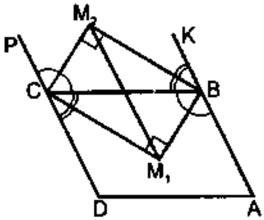


Рис. 258

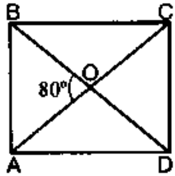


Рис. 259

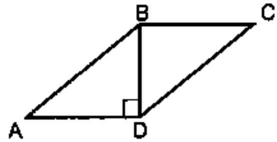


Рис. 260

г) В четырехугольнике BM_2CM_1 все углы прямые, поэтому BM_2CM_1 – прямоугольник и его диагонали равны, т. е. $BC = M_1M_2 = 8$ см, $AD = BC = 8$ см как противолежащие стороны параллелограмма.

Ответ: $AD = 8$ см.

II вариант

1. Пусть x см – одна из сторон параллелограмма, тогда другая сторона равна $(x - 6)$ см. Т. к. противолежащие стороны параллелограмма равны, а периметр равен 60 см, то:
$x + (x - 6) + x + (x - 6) = 60$, откуда $x = 18$, т. е. стороны параллелограмма равны 18 см, 12 см, 18 см, 12 см.

Ответ: 18 см, 12 см, 18 см, 12 см.

2. Рис. 259.
ΔAOB – равнобедренный, т. к. $AO = AC/2 = BD/2 = BO$, тогда углы при основании AB равны, т. е. $\angle OBA = \angle OAB = (180° - 80°) : 2 = 50°$. Таким образом, угол между диагональю и меньшей стороной прямоугольника равен 50°.

Ответ: 50°.

3. Рис. 260.
Диагональ $BD \perp AD$ и $BD = AB/2$, тогда в прямоугольном ΔABD $\angle A = 30°$, $\angle ABD = 90° - 30° = 60°$.
Т. к. $BD \perp AD$, $AD \parallel BC$, то $BD \perp BC$, т. е. $\angle DBC = 90°$, тогда $\angle ABC = 60° + 90° = 150°$.
В параллелограмме противолежащие углы равны, тогда $\angle A = \angle C = 30°$, $\angle ADC = \angle ABC = 150°$.

Ответ: 30°, 30°, 150°, 150°.

4. Рис. 261.

а) В ΔACD $\angle ACD = 90°$, $\angle D = 60°$, тогда $\angle CAD = 30°$ и $CD = AD/2$.

б) Т. к. AC – биссектриса $\angle BAD$, а $\angle CAD = 30°$, то $\angle BAD = 60°$, тогда трапеция $ABCD$ – равнобедренная, т. е. $AB = CD$.

в) $\angle CAD = \angle BCA = 30°$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AC, тогда ΔABC – равнобедренный, т. е. $AB = BC$.

г) $P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 35$. Т. к. $AB = BC = CD = AD/2$, то $AB + AB + AB + 2 \cdot AB = 35$, откуда $AB = 7$ см.

Ответ: $AB = 7$ см.

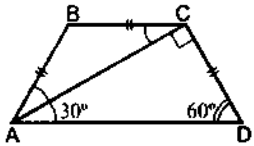


Рис. 261

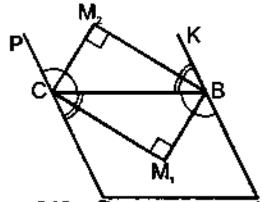


Рис. 262

5. Рис. 262.

а) Биссектрисы соседних углов параллелограмма перпендикулярны, поэтому $\angle BM_1C = 90°$.

б) $\angle KBC$ и $\angle PCB$ – односторонние при параллельных прямых AB и CD и секущей BC, поэтому биссектрисы углов KBC и PCB перпендикулярны, т. е. $\angle BM_2C = 90°$.

в) $\angle ABC$ и $\angle KBC$, $\angle DCB$ и $\angle PCB$ – смежные, биссектрисы смежных углов перпендикулярны, поэтому $\angle M_2BM_1 = 90°$, $\angle M_2CM_1 = 90°$.

г) В четырехугольнике BM_2CM_1 все углы прямые, значит BM_2CM_1 – прямоугольник и его диагонали равны, т. е. $BC = M_1M_2$.

д) В параллелограмме $ABCD$ $BC = AD$, а т. к. $AD = 6$ см, $BC = M_1M_2$, то $M_1M_2 = 6$ см.

Ответ: $M_1M_2 = 6$ см.

III уровень

I вариант

1. Рис. 263.

а) Проведем $BK \perp AD$ и $CH \perp AD$, тогда $KBCH$ – прямоугольник и $KH = BC = 5d$.

б) Прямоугольные ΔABK и ΔDCH равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$, т. к. $ABCD$ – равнобокая трапеция), тогда $AK = DH = (7d - 5d) : 2 = d$.

в) В прямоугольном ΔABK $AK = d$, $AB = 2d$, тогда $\angle ABK = 30°$, значит $\angle A = 60°$.

г) Т. к. $BK \perp AD$, $AD \parallel BC$, то $BK \perp BC$, т. е. $\angle KBC = 90°$, тогда $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = 120°$.

д) В равнобокой трапеции углы при каждом основании равны, тогда $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle ABC = \angle DCB = 120°$.

Ответ: 60°, 60°, 120°, 120°.

2. Рис. 264.

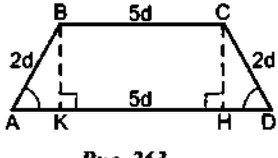


Рис. 263

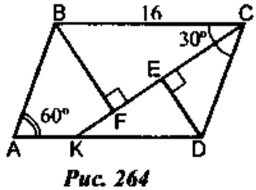


Рис. 264

а) В параллелограмме противолежащие углы равны и противолежащие стороны равны, следовательно, $\angle BCD = \angle A = 60°$, $BC = AD = 16$, $CD = AB = 10$.

б) CK – биссектриса $\angle BCD$, поэтому $\angle BCK = \angle DCK = 30°$.

в) В ΔBCF $\angle BFC = 90°$, $\angle BCF = 30°$, $BC = 16$, тогда $BF = 8$.

г) В ΔCDE $\angle CED = 90°$, $\angle DCE = 30°$, $CD = 10$, тогда $DE = 5$.

Ответ: 8; 5.

3. Рис. 265.

Т. к. в ΔDCA биссектриса является высотой, то ΔDCA – равнобедренный с основанием AD, т. е. $AC = CD$. В ромбе все стороны равны, $AD = CD$, значит $AD = CD = AC$, тогда ΔACD – равносторонний и $\angle D = 60°$. В ромбе противолежащие углы равны, сумма соседних углов равна 180°, тогда $\angle B = \angle D = 60°$ и $\angle BAD = \angle BCD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

4. Рис. 266.

а) ΔAMD – равносторонний, тогда $\angle MAD = 60°$.

б) $ABCD$ – квадрат, $\angle BAD = 90°$, и $\angle BAM = \angle BAD - \angle MAD = 30°$.

в) В ΔAMB $AB = AM$, т. к. $AM = MD = AD$, поэтому ΔABM – равнобедренный с основанием BM, в нем $\angle BAM = 30°$, тогда $\angle ABM = \angle AMB = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

Ответ: $\angle AMB = 75°$.

5. Рис. 267.

а) CM – биссектриса $\angle BCD$, тогда $\angle BCM = \angle DCM$.
Но $\angle BCM = \angle DMC$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей CM, тогда в ΔCDM $\angle DCM = \angle DMC$ и ΔCDM – равнобедренный, т. е. $CD = MD = 3$.

б) В ΔANM $\angle AMN = \angle CMD$ как вертикальные, $\angle ANM = \angle CMD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей NC, тогда т. к. $\angle MCD = \angle CMD$, то $\angle AMN = \angle ANM$ и ΔANM – равнобедренный, т. е. $AM = AN = 4$.

в) В параллелограмме $ABCD$ $CD = 3$, $AD = AM + DM = 4 + 3 = 7$, тогда $P_{ABCD} = 3 + 7 + 3 + 7 = 20$.

Ответ: $P_{ABCD} = 20$.

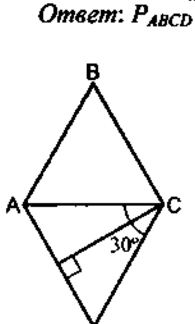


Рис. 265

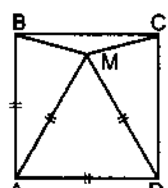


Рис. 266

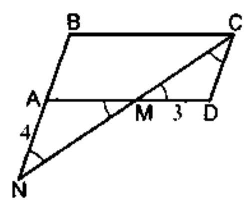


Рис. 267

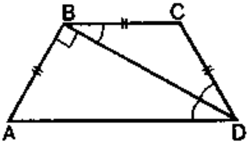


Рис. 268

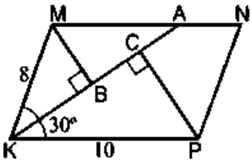


Рис. 269

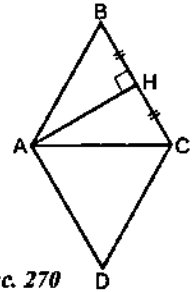


Рис. 270

II вариант

1. Рис. 268.

а) В ΔBCD $BC = CD$, тогда ΔBCD – равнобедренный и $\angle CBD = \angle CDB$.

б) $BC \parallel AD$, тогда $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест лежащие, тогда $\angle CDB = \angle BDA$, $\angle BDA = \angle CDA : 2$.

в) В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны, т. е. $\angle BAD = \angle CDA$.

г) ΔABD – прямоугольный, $\angle BAD + \angle BDA = 90°$, значит $\angle BAD + \angle CDA : 2 = 90°$, а т. к. $\angle BAD = \angle CDA$, то $\angle CDA = 60°$.

д) В равнобедренной трапеции углы при каждом основании равны, поэтому $\angle BAD = \angle CDA = 60°$, $\angle ABC = \angle BCD = 180° - \angle BAD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 120°, 60°.

2. Рис. 269.

а) В параллелограмме сумма соседних углов равна 180°, поэтому $\angle MKP = 180° - \angle M = 60°$.

б) Т. к. KA – биссектриса $\angle MKP$, то $\angle MKA = \angle PKA = 30°$.

в) В ΔKMC $\angle KCM = 90°$, $\angle MKC = 30°$, $KM = 8$, тогда $MC = 4$.

г) В ΔKCP $\angle KCP = 90°$, $\angle CKP = 30°$, $KP = 10$, тогда $CP = 5$.

Ответ: 4; 5.

3. Рис. 270.

а) Т. к. в ΔABC высота является медианой, то ΔABC – равнобедренный с основанием BC, т. е. $AB = AC$.

б) В ромбе все стороны равны, $AB = BC$, тогда $AB = BC = AC$ и ΔABC – равносторонний, $\angle B = 60°$.

в) В ромбе противолежащие углы равны, сумма соседних углов равна 180°, тогда $\angle B = \angle D = 60°$, $\angle BAD = \angle BCD = 120°$.

Ответ: 60°, 120°, 60°, 120°.

4. Рис. 271.

а) ΔBNC – равносторонний, тогда $\angle NBC = 60°$.

б) $ABCD$ – квадрат, $\angle ABC = 90°$, тогда:
$\angle ABN = \angle ABC - \angle NBC = 30°$.

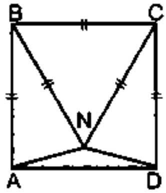


Рис. 271

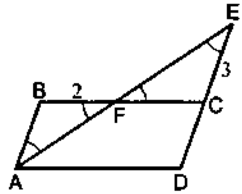


Рис. 272

в) В ΔABN $AB = BN$, т. к. $BN = BC = CN$, поэтому ΔABN – равнобедренный с основанием AN, в нем $\angle ABN = 30°$, тогда $\angle BAN = \angle BNA = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

г) $\angle BAD = 90°$, $\angle BAN = 75°$, тогда $\angle NAD = \angle BAD - \angle BAN = 15°$.

Ответ: $\angle NAD = 15°$.

5. Рис. 272.

а) AF – биссектриса $\angle BAD$, тогда $\angle BAF = \angle DAF$. Но $\angle BFA = \angle DAF$ как накрестлежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AF, тогда в ΔABF $\angle BAF = \angle BFA$ и ΔABF – равнобедренный, т. е. $AB = BF = 2$.

б) В ΔCEF $\angle CFE = \angle BFA$ как вертикальные, $\angle FEC = \angle BAF$ как накрестлежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AE, тогда т. к. $\angle BAF = \angle BFA$, то $\angle CFE = \angle FEC$ и ΔCEF – равнобедренный, т. е. $FC = EC = 3$.

в) В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$, $BC = BF + FC = 2 + 3 = 5$, тогда $P_{ABCD} = 2 + 5 + 2 + 5 = 14$. *Ответ*: $P_{ABCD} = 14$.

Площадь

В данной главе рассматриваются понятия площади многоугольника, площади прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции, а также теорема Пифагора.

Основная цель – сформировать у учащихся понятие площади многоугольника, развить умение вычислять площади фигур, применяя изученные свойства и формулы, применяя теорему Пифагора.

С понятием площади и формулами для вычисления площадей некоторых многоугольников (треугольник, прямоугольник, квадрат) учащиеся уже встречались в процессе изучения математики, начиная с третьего класса. Назначение данной главы – расширить и углубить представления учащихся об измерении площадей, вывести формулы площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции и ряд дополнительных формул, представленных в учебнике в виде задач.

Вычисление площадей многоугольников является составной частью решения задач по теме «Многогранники» в курсе стереометрии. Поэтому основное внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач.

Учителю следует обратить особое внимание на нетрадиционную для школьного курса теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Эта теорема играет важную роль при изучении подобия треугольников, однако воспроизведения ее доказательства требовать от всех учащихся необязательно. Знание данной теоремы и умение ею пользоваться позволяет решить большое число задач без использования теории подобия и тригонометрических формул, связывающих стороны и углы треугольника.

Доказательство одной из главных теорем геометрии – теоремы Пифагора – ведется с опорой на знания учащимися свойств площадей. В ознакомительном порядке рассматривается теорема, обратная теореме Пифагора, хотя учителю необходимо иметь в виду, что в дальнейшем при решении задач эта теорема будет иметь важное значение.

Основное внимание при изучении данной главы должно уделяться решению задач с учетом степени подготовленности как целого класса, так и отдельных учащихся.

Урок 17
Площадь многоугольника

Цели урока:

- Дать представление об измерении площадей многоугольников.
- Рассмотреть основные свойства площадей.
- Вывести формулу для вычисления площади квадрата.
- Показать учащимся примеры использования изученного теоретического материала в ходе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Анализ контрольной работы

1. Общий анализ контрольной работы.

2. Решение задач контрольной работы, с которыми не справились большинство учащихся.

(Перед началом урока вывесить решения задач контрольной работы в классе.)

III. Подготовка к восприятию нового материала

Решить задачи (фронтальная работа с классом):

1. Через точку во внутренней области равностороннего треугольника проведены две прямые, параллельные двум сторонам треугольника. На какие фигуры разбивается этими прямыми данный треугольник?
2. Рис. 273. *Дано*: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 2AB$, AM – биссектриса $\angle BAD$. *Докажите*, что часть отрезка AM, лежащая во внутренней области параллелограмма $ABCD$, равна части, лежащей во внешней области.

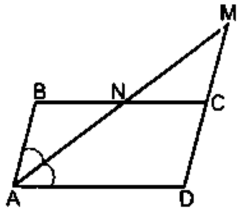


Рис. 273

IV. Изучение нового материала

1. Ввести понятие площади.

– Понятие площади каждому известно из жизненного опыта. Часто мы слышим: «площадь нашей квартиры равна 63 м^2». Как вы понимаете это предложение? (*Это величина квартиры. Пол данной квартиры можно застелить 63 квадратами со стороной 1 м.*)

– С сегодняшнего дня мы будем учиться вычислять площади различных геометрических фигур.

2. Единицы измерения площадей.

– Как и измерение длин отрезков, измерение площадей проводится с помощью единиц измерения. Какие единицы измерения площадей вам известны?

квадратный метр – м^2;
квадратный сантиметр – см^2;
квадратный миллиметр – мм^2;
ар (сотка) – 100 м^2;
га (гектар) – 10000 м^2 и др.

– Как вы понимаете утверждение «единица измерения площади см^2»? (*Площадь измеряется квадратами со стороной 1 см.*)
– Может ли площадь фигуры выражаться отрицательным числом? (*Нет, не может.*)

3. Измерение площадей многоугольников способом разбиения фигуры на квадраты.

– Как измерить площадь фигуры, изображенной на рис. 274 а) в квадратных дециметрах? (*Нужно фигуру разбить на квадратные сантиметры.*)

Рис. 274 б). Сторону *AD* разобьем на отрезки по 1 дм каждый и через концы отрезков проведем прямые, перпендикулярные стороне *AD*. Далее проведем прямые, параллельные *AD*, на расстоянии 1 дм друг от друга. Сосчитаем количество целых квадратов, вместившихся в фигуру *ABCD*. Неполные квадраты разобьем на квадратные сантиметры. Каждый квадратный сантиметр – это сотая часть квадратного дециметра. Таким образом можно вычислить площадь фигуры в дм^2 с точностью до 0,01 дм^2. Для более точного измерения площади данной фигуры неполные квадраты со стороной 1 см разобьем на квадраты со стороной 1 мм и т. д.

– Такой способ вычисления площадей фигур называется способом разбиения фигуры на квадраты, но чаще всего площади геометрических фигур вычисляются по готовым формулам, с которыми мы познакомимся на следующих уроках.

4. Рассмотреть свойства площадей:

а) Равные многоугольники имеют равные площади.
б) Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.
в) Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Доказательство третьего свойства является трудным, поэтому п. 49 можно предложить более подготовленным учащимся изучить самостоятельно или рассмотреть на факультативе.

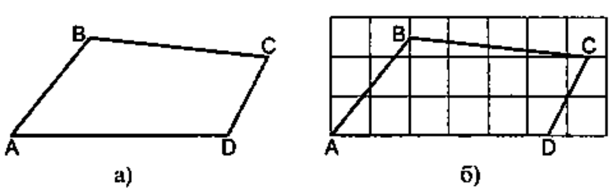


Рис. 274

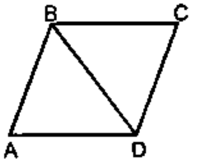


Рис. 275

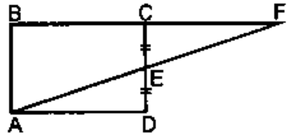


Рис. 276

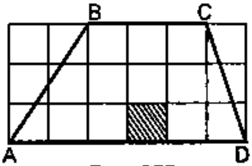


Рис. 277

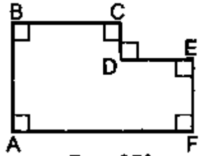


Рис. 278

V. Закрепление изученного

Работа в рабочих тетрадях: решить самостоятельно задачи № 27, 28. Решение задач проверить: один из учащихся читает свое решение, остальные проверяют, исправляют ошибки.

Решить задачи устно:

1. Рис. 275. $ABCD$ – параллелограмм. $S_{ABCD} = 12$.
   Найти: S_{ABD}, S_{BCD}.
2. Рис. 276. $ABCD$ – прямоугольник. $CE = DE$, $S_{ABCD} = Q$.
   Найти: S_{ABF}.
3. Рис. 277. Площадь заштрихованного квадрата равна 1.
   Найти: S_{ABCD}.
4. Рис. 278. $AB = BC = 3$, $AF = 5$, $EF = 2$. *Найти*: S_{ABCDEF}.

Решить задачу № 449 в), 450 в) на доске и в тетрадях учащихся.

Вызвать к доске двух учеников, каждый из них решает одну задачу, в тетрадях учащиеся решают обе задачи. По окончании работы решение задач проверить.

Задача № 449 (в)

$a = 3\sqrt{2}$ м $\Rightarrow S = a^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$ (м^2).

Задача № 450 (в)

$S = 12$ м$^2 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (м).

Решить самостоятельно задачи № 449 а), 450 а), 451, 447.

Ответы к задачам:

449 (а) – 1,44 см^2.
450 (а) – 4 см.
451 – а) 24 см^2 = 24 · 100 мм^2 = 2400 мм^2;
б) 24 см^2 = 24 · 0,01 дм^2 = 0,24 дм^2.

VI. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Пп. 48, 49, вопросы 1, 2; Решить задачи № 448, 449 б), 450 б), 446.

Дополнительная задача: В прямоугольнике $ABCD$ серединный перпендикуляр диагонали AC пересекает сторону BC в точке K так, что $BK : KC = 1 : 2$. На какие углы диагональ прямоугольника делит его угол?

Урок 18
Площадь прямоугольника

Цели урока:

- Вывести формулу площади прямоугольника и показать ее применение в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Два ученика вызываются к доске для оформления решения домашнего задания. В то же время 3–6 учащихся работают по индивидуальным карточкам, остальные устно решают задачи (фронтальная работа с классом).

Проверка домашнего задания

Проверить задачу № 448 и дополнительную домашнюю задачу.

Задача № 448

Решение (рис. 279):

Опустим перпендикуляр к BC из точки E ($EO \perp BC$).

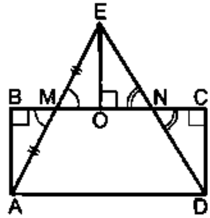


Рис. 279

Прямоугольные треугольники ABM и EOM равны по гипотенузе и острому углу ($AM = EM$, $\angle BMA = \angle EMO$), отсюда $EO = AB$, значит, $EO = CD$, так как в прямоугольнике противолежащие стороны AB и CD равны.

Прямоугольные треугольники EON и DCN равны по катету и острому углу ($EO = CD$, $\angle ONE = \angle CND$ как вертикальные).

$S_{AED} = S_{ANMD} + S_{MOE} + S_{NOE}$,

$\Delta MOE = \Delta MBA \Rightarrow S_{MOE} = S_{MBA}$,

$\Delta NOE = \Delta NCD \Rightarrow S_{NOE} = S_{NCD}$,

Тогда $S_{AED} = S_{AMND} + S_{MBA} + S_{NCD} = S_{ABCD}$, ч. т. д.

Дополнительная задача

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AO = OC$, $OK \perp AC$, $BK : KC = 1 : 2$.

Найти: $\angle BCA$, $\angle DCA$.

Решение (см. рис. 280):

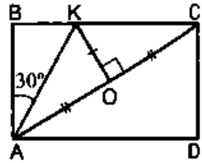


Рис. 280

а) $\Delta AKO = \Delta CKO$ по двум катетам ($\angle AOK = \angle COK = 90°$, $AO = OC$, KO – общий катет), тогда $AK = CK$.

б) ΔABK – прямоугольный. Т. к. $BK : KC = 1 : 2$, а $AK = CK$, то $BK : AK = 1 : 2$, тогда $\angle KAB = 30°$, $\angle AKB = 60°$, и $\angle AKC = 120°$.

в) Т. к. $AK = CK$, то $\angle KAC = \angle KCA$ как углы при основании равнобедренного треугольника AKC.
$\angle AKC = 120°$, тогда $\angle KCA = \angle KAC = 30°$.

г) $\angle BCD = 90°$, $\angle BCA = 30°$, тогда $\angle DCA = 60°$.

Ответ: 30°, 60°.

Индивидуальные задания по карточкам

I уровень

1. Рис. 281. $ABCD$ – параллелограмм, $K \in BC$, $S_{ABCD} = 24$ см^2.
Найти: S_{AKD}.
2. Рис. 282. $ABCD$ – квадрат.
Найти: S_{ABCD}.

II уровень

1. В трапеции $MNKP$ MP и NK – основания ($MP > NK$), E – середина KP, прямые NE и MP пересекаются в точке S, площадь трапеции равна 45 дм^2. Найдите площадь треугольника MNS.
2. Найдите сумму площадей квадратов, построенных на сторонах прямоугольника со сторонами 5 и 7 см.

III уровень

1. Докажите, что площадь квадрата равна половине произведения его диагоналей.
2. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E так, что $DE \perp AB$, $DE = AB = 10$ см. Найдите площадь этого параллелограмма.

Решение задач (устно)

1. Задача № 29 из рабочей тетради.
Ответ: а) 8 см; б) 1,3 дм.
2. Докажите, что два прямоугольника равны, если равны их смежные стороны.

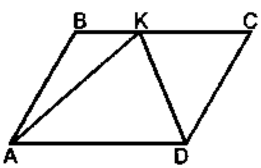


Рис. 281

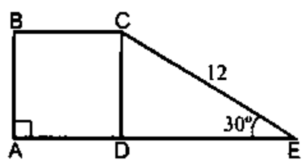


Рис. 282

3. Рис. 283. *Дано*: $ABCD$ – квадрат, $MN \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $AM = CE = 3$ см, $DE = 6$ см.
Найти: S_{AFKM}.

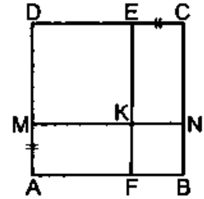


Рис. 283

III. Изучение нового материала

1. Задание учащимся: изучить п. 50 по учебнику самостоятельно.

2. Доказать теорему о площади прямоугольника (на доске заранее подготовить чертеж).

Вызвать к доске одного из наиболее подготовленных учащихся для доказательства теоремы. Остальные оформляют доказательство теоремы в тетрадях:

Дано: $S = a \cdot b$.

Доказательство (рис. 284):

а) Достроить прямоугольник до квадрата $AMKE$ со стороной $(a + b)$.
$S_{AMKE} = (a + b)^2$.

б) $S_{AMKE} = S_{ABCD} + S_{BMNC} + S_{CNKP} + S_{DCPE}$.

в) $ABCD = CNKP \Rightarrow S_{ABCD} = S_{CNKP} = S$.
$BMNC$ – квадрат со стороной $a \Rightarrow S_{BMNC} = a^2$.
$DCPE$ – квадрат со стороной $b \Rightarrow S_{DCPE} = b^2$.

г) $S_{AMKE} = (a + b)^2 = S + a^2 + S + b^2$
$a^2 + 2ab + b^2 = 2S + a^2 + b^2$.
$2S = 2ab$, откуда $S = ab$, что и требовалось доказать.

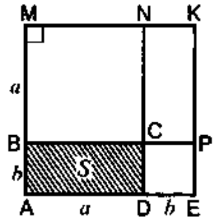


Рис. 284

IV. Закрепление изученного материала

Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 30, 31 (устно). Один из учащихся читает задачу и ее решение, заполняя пропуски, остальные слушают отвечающего, по необходимости исправляют его ошибки.

Решить устно № 452 а), в), 453 в).

Решить задачу № 458 на доске и в тетрадях учащихся. Один из учащихся решает задачу у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 458

$S_{кв.} = a^2$, $S_{прям.} = a \cdot b$

$P_{кв.} = 4a$, $P_{прям.} = 2 \cdot (a + b)$

Заборы имеют одинаковую длину, поэтому участки земли имеют одинаковый периметр.

$S_{прям.} = a \cdot b = 220 \cdot 160 = 35200$ (м^2)

$P_{прям.} = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (220 + 160) = 760$ (м)

$P_{кв} = 4a$, но $P_{кв.} = P_{прям.} = 760$ (м), т. е. $4a = 760$, $a = 190$ (м)

$S_{кв.} = a^2 = 190^2 = 36100$ (м^2)

36100 м^2 > 35200 м^2, поэтому площадь квадрата больше площади прямоугольника. $36100 - 35200 = 900$ (м^2)

Ответ: площадь участка земли, имеющего форму квадрата, больше на 900 м^2.

Наводящие вопросы:

– «Два участка земли огорожены заборами одинаковой длины». Переведите на математический язык это предложение.
– Как найти сторону квадрата, если его периметр равен периметру прямоугольника со сторонами 220 м и 160 м?
– Как определить площадь какого участка больше и на сколько?

Решить задачу № 457 самостоятельно. Учитель по необходимости оказывает индивидуальную помощь.

Наводящие вопросы:

– Как найти площадь прямоугольника? А площадь квадрата?
– Чему равна сторона квадрата, если его площадь равна 144 м^2? Как проверить правильность своих вычислений?

V. Самостоятельная работа с последующей самопроверкой

Указания и ответы для самопроверки подготовить в распечатанном виде и выдавать учащимся после того, как решены все задачи. Учащиеся проверяют свое решение, исправляют ошибки и при наличии времени решают аналогичные задачи (другой вариант). В случае, если ученик успешно справился со своей самостоятельной работой, он приступает к решению задач следующего уровня.

I уровень

I вариант

1. Найдите площадь прямоугольника, если его периметр равен 80 см, а отношение сторон равно 2 : 3.
2. Рис. 285. Площадь пятиугольника $ABOCD$ равна 48 см^2. Найдите площадь и периметр квадрата $ABCD$.

II вариант

1. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 98 см^2, а одна из сторон вдвое больше другой.
2. Рис. 286. Периметр квадрата $PTMK$ равен 48 см. Найдите площадь пятиугольника $PTMOK$.

II уровень

I вариант

1. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AD равна 10 см. Расстояние от точки пересечения диагоналей до этой стороны равно 3 см. Найдите площадь прямоугольника.

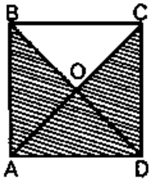


Рис. 285

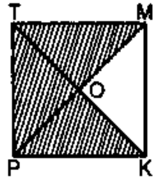


Рис. 286

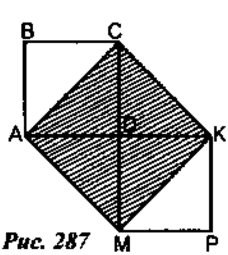


Рис. 287

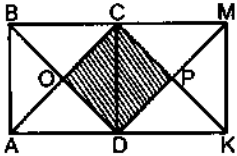


Рис. 288

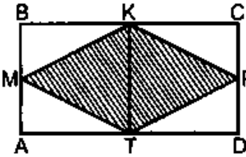


Рис. 289

2. Рис. 287. *ABCD* и *MDKP* – равные квадраты. *AB* = 8 см. Найдите площадь и периметр четырехугольника *ACKM*.

II вариант

1. Площадь квадрата равна 36 см^2. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его сторон.
2. Рис. 288. *ABCD* и *DCMK* – квадраты. *AB* = 6 см. Найдите площадь и периметр четырехугольника *OCPD*.

III уровень

I вариант

1. В трапеции *ABCD* $\angle A = 45°$, $\angle C = 100°$. Диагональ *BD* составляет с боковой стороной *CD* угол 35°. На стороне *AB* построен параллелограмм *ABPK* так, что точка *D* принадлежит отрезку *BP* и *BD* : *DP* = 2 : 1. Найдите площадь параллелограмма, если его периметр равен 30 см.
2. Рис. 289. *ABCD* – прямоугольник; *M*, *K*, *P*, *T* – середины его сторон, *AB* = 6 см, *AD* = 12 см. Найдите площадь четырехугольника *MKPT*.

II вариант

1. В трапеции *MPKO* $\angle M = 45°$, $\angle K = 135°$. На стороне *MP* трапеции построен параллелограмм *MPDT* так, что его сторона *PD* параллельна прямой *KO* и пересекает сторону *MO* в точке *A*, причем *PA* : *AD* = 1 : 3. Площадь параллелограмма равна 36 см^2. Найдите его периметр.
2. Рис. 290. *ABCD* – прямоугольник; *M*, *K*, *P*, *T* – середины его сторон, *AB* = 16 см, *AD* = 10 см. Найдите площадь шестиугольника *AMKCPT*.

Указания и ответы для самопроверки

I уровень

I вариант

1. Рис. 291. *x* – коэффициент пропорциональности.

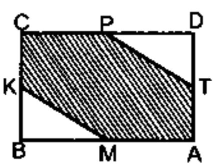


Рис. 290

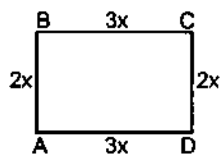


Рис. 291

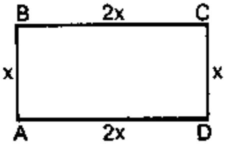


Рис. 292

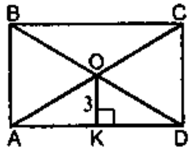


Рис. 293

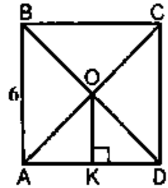


Рис. 294

$P = 2x + 3x + 2x + 3x = 80$, $x = 8$. $AB = 16$ см, $AD = 24$ см.
$S_{ABCD} = 16 \cdot 24 = 384$ (см^2)

Ответ: 384 см^2.

2. $S_{ABO} = S_{ADO} = S_{CDO} = S_{BOC}$.
$S_{ABOCD} = 48$ см^2, $S_{ABO} = 16$ см^2, $S_{ABCD} = 64$ см^2, тогда $AB = 8$ см, $P_{ABCD} = 32$ см.

Ответ: $S_{ABCD} = 64$ см^2, $P_{ABCD} = 32$ см.

II вариант

1. Рис. 292. $S = x \cdot 2x = 98$, $x = 7$.
$AB = CD = 7$ см, $AD = DC = 14$ см. $P_{ABCD} = 42$ см.

Ответ: $P_{ABCD} = 42$ см.

2. $P_{PTMK} = 48$ см, тогда $PT = TM = MK = PK = 12$ см.
$S_{PTMK} = 12 \cdot 12 = 144$ см^2;
$S_{OMK} = S_{PTMK} : 4 = 36$ см^2;
$S_{PTOMK} = 144 - 36 = 108$ см^2;

Ответ: $S_{PTOMK} = 108$ см^2

II уровень

I вариант

1. Рис. 293.
Докажи, что $OK = AB/2$.
$S_{ABCD} = AB \cdot AD = 6 \cdot 10 = 60$ (см^2)

Ответ: $S_{ABCD} = 60$ см^2.

2. Площадь квадрата $ACKM$ в два раза больше площади квадрата $ABCD$, значит, площадь квадрата $ACKM$ равна 128 см^2, следовательно, $AC = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ см.
Периметр $ACKM$ равен $8\sqrt{2} \cdot 4 = 32\sqrt{2}$ см.

Ответ: $P_{ACKM} = 32\sqrt{2}$ см.

II вариант

1. Рис. 294.
$S_{ABCD} = 36$ см^2, $AB = 6$ см.
Докажи, что $OK = AD/2 = 3$ см.

Ответ: 3 см.

2. Площадь квадрата $ABCD$ в два раза больше площади квадрата $OCPD$, значит, площадь квадрата $OCPD$ равна 18 см^2, следовательно, $OC = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ (см).

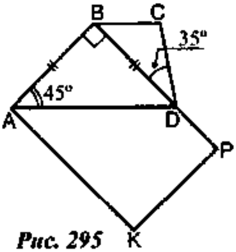


Рис. 295

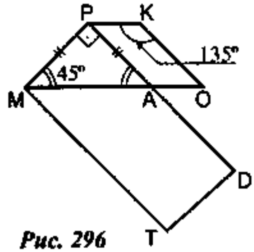


Рис. 296

Периметр *OCPD* равен $3\sqrt{2} \cdot 4 = 12\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $P_{OCPD} = 12\sqrt{2}$ см, $S_{OCPD} = 18$ см^2.

III уровень

I вариант

1. Рис. 295.
   Из ΔBCD $\angle CBD = 45°$. Т. к. $\angle ABC = 135°$, то $\angle ABD = 90°$, тогда *ABPK* – прямоугольник. В ΔABD $\angle BAD = \angle BDA = 45°$, тогда $AB = BD$ и $AB : BP = 2 : 3$.
   $P_{ABPK} = 30$ см, тогда $2x + 3x + 2x + 3x = 30$.
   Откуда $x = 3$, $AB = 6$ см, $BP = 9$ см, $S_{ABPK} = 6 \cdot 9 = 54$ см^2.

Ответ: $S_{ABPK} = 54$ см^2.

2. Проведи прямые *KT* и *MP* и докажи, что прямоугольник *ABCD* разбился на 8 равных треугольников.
   $S_{MPKT} = S_{ABCD} : 2 = 6 \cdot 12 : 2 = 36$ см^2.

Ответ: $S_{MPKT} = 36$ см^2.

II вариант

1. Рис. 296.
   $\angle O = 45°$, тогда $\angle PAM = 45°$ и в ΔMPA $\angle MPA = 90°$, тогда *MPDT* – прямоугольник.
   В ΔMPA $MP = AP$, тогда $MP : PD = 1 : 4$, т. е. $MP = x$, $PD = 4x$.
   $S_{MPDT} = 36$ см$^2 = x \cdot 4x$, откуда $x = 3$, т. е. $MP = 3$ см, $PD = 12$ см, $P_{MPDT} = 30$ см.

Ответ: $P_{MPDT} = 30$ см.

2. Проведи прямые *MP*, *KT*, *KP*, *MT* и докажи, то прямоугольник *ABCD* разбился на 8 равных треугольников.
   $S_{AMKCPT} = 3/4 \cdot S_{ABCD} = 3 : 4 \cdot 16 \cdot 10 = 120$ (см^2).

Ответ: $S_{AMKCPT} = 120$ см^2.

VI. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 50, вопрос 3.

Решить задачи № 454, 455, 456; задачу № 32 из рабочей тетради;

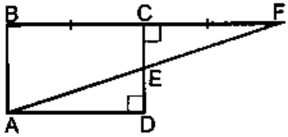


Рис. 297

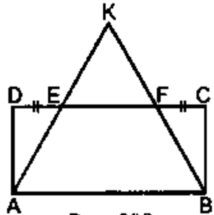


Рис. 298

Дополнительные задачи

I уровень

Рис. 297.
Дано: $ABCD$ – прямоугольник, C – середина BF.
$P_{ABCD} = 46$ см, BC на 5 см больше AB.
Найти: а) S_{ABCD}; б) S_{ABF}

II уровень

Рис. 298.
Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $P_{ABCD} = 44$ см, $DC : AD = 7 : 4$.
$DE = FC = EF/2$.
Найти: S_{ABK}.

Урок 19
Площадь параллелограмма

Цели урока:

- Вывести формулу для вычисления площади параллелограмма и показать применение этой формулы в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

К доске вызываются три ученика для оформления решения домашних задач. В это время учитель проводит теоретический опрос, 3–6 учащихся работают по индивидуальным карточкам. После теоретического опроса проверяют правильность решения домашнего задания.

Теоретический опрос

– Перечислите основные свойства площадей.
– Сформулируйте и докажите теорему о площади прямоугольника.

Проверка домашнего задания

Проверить решение дополнительных домашних задач и задачи 455.

Решение дополнительных задач:

I уровень

а) Т. к. $P_{ABCD} = 46$ см, BC на 5 см больше AB, то $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = AB + (AB + 5) + AB + (AB + 5) = 46$ (учтено, что $BC = AD = AB + 5$ см, $AB = CD$).
Тогда $AB = 9$ см, $BC = 14$ см, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 9 \cdot 14 = 126$ см^2.

б) $\Delta ADE = \Delta FCE$ по катету и острому углу ($CE = BC = AF$, $\angle CEF = \angle AED$ как вертикальные), тогда $S_{ADE} = S_{FCE}$, и $S_{ABF} = S_{ABCE} + S_{CEF} = S_{ABCE} + S_{ADE} = S_{ABCD} = 126$ см^2.

Ответ: а) $S_{ABCD} = 126$ см^2; б) $S_{ABF} = 126$ см^2.

Наводящие вопросы:
- Как найти стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен 46 см, а сторона BC на 5 см больше AB?
- Какая формула применяется для вычисления площади прямоугольника?
- Что вы можете сказать о площадях прямоугольника $ABCD$ и треугольника ABF? Почему?

II уровень

Рис. 299.

Рис. 299

а) Проведем KP так, чтобы $PE = PF$, тогда $DE = PE = PF = FC$, так как по условию $DE = FC = EF : 2$.

б) $\Delta ADE = \Delta BCF$ по двум катетам ($DE = FC$ по условию, $AD = CB$ как противолежащие стороны прямоугольника), тогда $\angle DEA = \angle CFB$, значит, вертикальные им углы KEP и KFP тоже равны.

в) Т. к. $\angle KEP = \angle KFP$, то ΔEKF – равнобедренный и медиана KP является высотой, следовательно, $\angle EPK = \angle FPK = 90°$.

г) $\Delta ADE = \Delta KPE$ по катету и прилежащему к нему острому углу ($DE = PE$, $\angle DEA = \angle PEK$), $\angle D = \angle KPE = 90°$.

д) $\Delta BCF = \Delta KPF$ по катету и прилежащему к нему острому углу ($FC = PF$, $\angle KPF = \angle BFC$, $\angle C = \angle KPF = 90°$).

е) $S_{ABK} = S_{AEFB} + S_{EPK} + S_{FPK} = S_{AEFB} + S_{ADE} + S_{BCF} = S_{ABCD}$.

ж) $DC : AD = 7 : 4$, тогда $DC = 7k$, $AD = 4k$ (k – коэффициент пропорциональности). $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 44$.
Т. к. противолежащие стороны прямоугольника равны, то $AB = CD = 7k$, $AD = BC = 4k$, тогда $7k + 4k + 7k + 4k = 44$, $k = 2$, следовательно $AB = 14$ см, $AD = 8$ см, $S_{ABCD} = 14 \cdot 8 = 112$ (см^2), тогда $S_{ABK} = 112$ (см^2).

Ответ: $S_{ABK} = 112$ (см^2).

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о площади прямоугольника $ABCD$ и площади треугольника AKB? Почему?
– Для нахождения площади прямоугольника необходимо найти его стороны. Как это можно сделать, используя условия задачи?

Задача № 455

Решение:

$S_{прям.} = a \cdot b$. $S_{пола} = 5{,}5 \cdot 6 = 33$ (м^2).

$S_{дощечки} = 5 \cdot 30 = 150$ (см^2) $= 0{,}015$ (м^2).

Чтобы найти количество требуемых дощечек, нужно $S_{пола}$ разделить на $S_{дощечки}$:

$33 : 0{,}015 = 2200$ (дощечки).

Ответ: 2200.

Наводящие вопросы:

– Как сосчитать, сколько дощечек паркета нужно для покрытия пола? Что для этого нужно знать?
– Как найти площадь пола? А площадь одной дощечки?
– Как перевести квадратный сантиметр в квадратный метр?

Работа по индивидуальным карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. Периметр квадрата равен 20 см. Прямоугольник имеет такую же площадь, что и квадрат, а одна из его сторон равна 10 см. Найдите периметр прямоугольника.
2. Найдите площадь прямоугольника с периметром 60 см и отношением сторон 1 : 2.

II уровень (карточка № 2)

1. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ разбивает сторону BC на отрезки, равные 4 и 5 см. Найдите площадь прямоугольника.
2. В прямоугольнике $MNKP$ сторона MP равна 8 см, а расстояние от точки пересечения диагоналей до этой стороны равно 5 см. Чему равна площадь этого прямоугольника?

III уровень (карточка № 3)

1. Высота BD треугольника ABC равна 8 см и делит сторону AC на отрезки, равные 5 и 6 см. Найдите площадь треугольника.
2. Диагонали ромба равны 10 и 12 см. Чему равна его площадь?

Решение задач с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

(Фронтальная работа с классом.)

1. Рис. 300. *Дано*: $ABCD$ – параллелограмм, $BM = 4$, $MN = 6$, $BM \perp AD$, $CN \perp AD$.
   Доказать: $S_{ABM} = S_{DCN}$. *Найти*: S_{ABCD}.
2. Рис. 301. *Дано*: $ABCD$ – параллелограмм. *Найти*: S_{ABCD}.

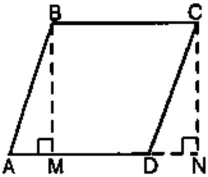


Рис. 300

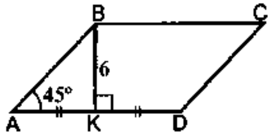


Рис. 301

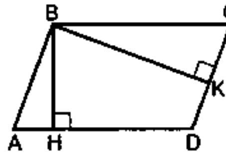


Рис. 302

III. Изучение нового материала

Высота параллелограмма

Ввести понятие высоты параллелограмма.

На доске и в тетрадях – рисунок (рис. 302):

BH – высота, проведенная к стороне AD параллелограмма $ABCD$.

BK – высота, проведенная к стороне CD параллелограмма $ABCD$.

Задача

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = a$, BH – высота, $BH = h$.

Найти: S_{ABCD}.

(Разбить учащихся на группы по 3–4 человека, дать на обдумывание 3–5 минут, а затем обсудить решение задачи, выслушав все варианты решений и выбрав среди предложенных наиболее удачный.)

Решение задачи оформить в виде теоремы на доске и в тетрадях учащихся. У доски работает один из наиболее подготовленных учащихся.

Теорема: $S_{\text{пар-ма}} = a \cdot h_a$, где a – сторона параллелограмма, h_a – высота, проведенная к ней.

Доказательство (рис. 303):

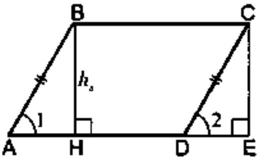


Рис. 303

1) Проведем $BH \perp AD$, $CE \perp AD$.
2) $\Delta ABH = \Delta DCE$ по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма; $\angle 1 = \angle 2$, так как $\angle 2 = 180° - \angle ADC$ и $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ как сумма внутренних односторонних углов при параллельных прямых AB и CD и секущей AD; $\angle AHB = \angle CED = 90°$) $\Rightarrow S_{ABH} = S_{DCE}$, $DE = AH$.
3) $S_{ABCD} = S_{ABH} + S_{HBCD} = S_{DCE} + S_{HBCD} = S_{HBCE}$.
   $HBCE$ – прямоугольник, $S_{HBCE} = HE \cdot BH$, $HE = HD + DE$, но так как $DE = AH$, то $HE = AH + HD = AD$, т.е. $S_{HBCE} = AD \cdot BH = a \cdot h_a$, отсюда $S_{ABCD} = a \cdot h_a$.

В тетрадях и на доске записать:

$$S_{\text{пар-ма}} = a \cdot h_a$$

где a – сторона параллелограмма,

h_a – высота, проведенная к стороне a.

IV. Закрепление изученного

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 33, 34. Учащиеся работают самостоятельно. По окончании работы один из учащихся по указанию учителя читает свое решение, остальные проверяют, исправляют свои ошибки и указывают на ошибки отвечающего.

2. Решить устно № 459 (а, б)

3. Решить на доске и в тетрадях задачи № 463, 464 (в). Два ученика самостоятельно работают у доски, остальные – в тетрадях. После завершения работы, учащиеся проверяют правильность решения задач на доске.

Задача № 463

Дано: $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 8{,}1$ см, $AC = 14$ см, $\angle DAC = 30°$ (см. рис. 304).

Найти: S_{ABCD}.

Решение:

а) Проведем высоту CK к стороне AD параллелограмма. ΔACK – прямоугольный, в нем $\angle CAK = 30°$, $AC = 14$ см, тогда $CK = 7$ см.

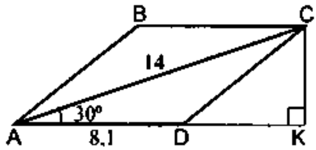


Рис. 304

б) $S_{ABCD} = CK \cdot AD = 7 \cdot 8{,}1 = 56{,}7$.

Ответ: $S_{ABCD} = 56{,}7$ см^2.

Наводящие вопросы:

– Какая формула используется для вычисления площади параллелограмма?

– Сторона AD равна 8,1 см. Высоту к ней можно провести из вершин B и C. Которую из них удобнее будет вычислить?

Задача № 464 в)

Дано: $S = 54$ см^2, $a = 4{,}5$ см, $b = 6$ см.

Найти: h_1 и h_2.

Решение: $S_{\text{пар-ма}} = a \cdot h_a$ или $S_{\text{пар-ма}} = b \cdot h_b$, поэтому $h_1 = h_a = S_{\text{пар-ма}} : a = 54 : 4{,}5 = 12$ см, $h_2 = h_b = S_{\text{пар-ма}} : b = 54 : 6 = 9$ см.

Ответ: $h_1 = 12$ см, $h_2 = 9$ см.

Наводящие вопросы:

– Назовите две формулы, позволяющие вычислить площадь данного параллелограмма?

– Зависит ли величина площади от способа вычисления?

– Как найти h_1 и h_2?

4. Решить самостоятельно задачи № 461, 464 (б), 465.

Ответы и краткое решение задач.

Задача № 461

$h = 6$ см $\Rightarrow S_{ABCD} = 14 \cdot 6 = 84$ см^2.

Задача № 464 (б)

$$S = a \cdot h_a = b \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{a \cdot h_2}{b} = \frac{10 \cdot 6}{15} = 4 \text{ (см)}.$$

Задача № 465

Рис. 305.

$BK = 2$ см $\Rightarrow AB = 4$ см.

$S_{ABCD} = AB \cdot BM = 4 \cdot 3 = 12$ (см^2).

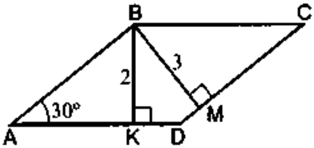


Рис. 305

Дополнительные задачи

а) Стороны параллелограмма равны 10 см и 6 см, а угол между этими сторонами равен 150°. Найдите площадь этого параллелограмма.

(*Ответ*: 30 см^2)

б) Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 8 см и 6 см.

(*Ответ*: 24 см^2)

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 51, вопрос 4;

Решить задачи № 459 (в, г), 460, 464 (а), 462.

Дополнительная задача: Высоты, проведенные из вершины тупого угла параллелограмма, составляют угол в 45°. Одна из высот делит сторону, на которую она опущена, на отрезки 2 см и 8 см, считая от вершины острого угла. Найдите площадь параллелограмма.

Урок 20
Площадь треугольника

Цели урока:

- Вывести формулы для вычисления площади треугольника и показать их применение в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

(Фронтальная работа с классом.)

– Сформулируйте и докажите теорему о площади параллелограмма. (Один ученик готовит доказательство теоремы у доски.)
– Сформулируйте основные свойства площадей фигур.
– Сформулируйте теорему о площади прямоугольника.

Проверка домашнего задания

Проверить решение дополнительной домашней задачи. (Индивидуально, пока учащиеся работают в рабочих тетрадях.)

Решение (рис. 306):

В ΔABE $\angle ABE = 90° - \angle A$, в ΔCBK $\angle CBK = 90° - \angle C$.

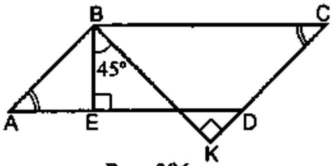


Рис. 306

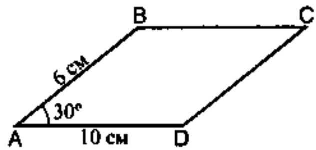


Рис. 307

Тогда: $\angle A + \angle ABC = \angle A + \angle ABE + \angle EBK + \angle CBK =$
$= \angle A + (90° - \angle A) + 45° + (90° - \angle C) = 225° - \angle C = 180°$,
тогда $\angle C = 45°$.
ΔABE – прямоугольный, равнобедренный ($\angle A = \angle C = 45° =$
$= \angle ABE = 90° - \angle A = 45°$), тогда $AE = BE = 2$ см.
$S_{ABCD} = AD \cdot BE = 2 \cdot 10 = 20$ (см^2).
Ответ: 20 см^2.

Работа в рабочих тетрадях

(Самостоятельно с последующей проверкой.)
Решить задачу № 35 (*Ответ*: $S_{ABCD} = 20{,}48$ см^2).

Решение задач с целью закрепления формулы для вычисления площади параллелограмма

(Самостоятельно с последующей самопроверкой.)

1. Рис. 307. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: S_{ABCD}.
2. Рис. 308. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: S_{ABCD}.
3. Рис. 309. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: S_{ABCD}.
4. Рис. 310. $ABCD$ – ромб, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см.
   Найти: S_{ABCD}.

Ответы к задачам:

1. $S_{ABCD} = 30$ см^2; **2.** $S_{ABCD} = 20$ см^2;
3. $S_{ABCD} = 56$ см^2; **4.** $S_{ABCD} = 40$ см^2.

Решение задач с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала (устно)

1. Рис. 311. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: S_{ABCD}, S_{ABD}, S_{BCD}, S_{ABC}, S_{ADC}.

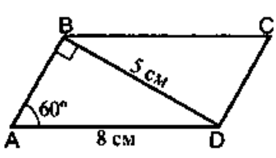


Рис. 308

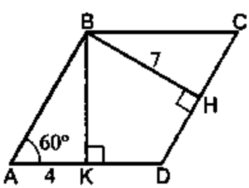


Рис. 309

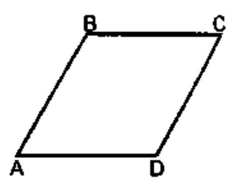


Рис. 310

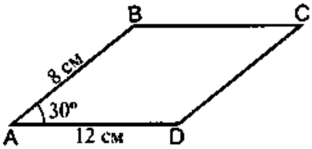


Рис. 311

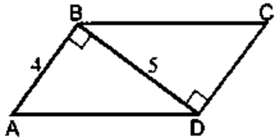


Рис. 312

2. Рис. 312. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: S_{ABD}.

В процессе решения этих задач необходимо повторить основные свойства площадей, формулу для вычисления площади параллелограмма, акцентируя внимание учащихся на том, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

III. Изучение нового материала

Задача

Дано: в треугольнике ABC $AB = c$, CH – высота, $CH = h$.
Найти S_{ABC}.

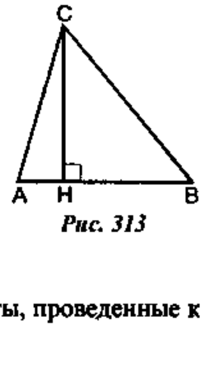


Рис. 313

Учащиеся решают задачу самостоятельно, после обсуждения решения задачи в тетрадях и на доске записывается (рис. 313):

$S_\Delta = CH \cdot AB : 2$

$S_\Delta = h_a \cdot a : 2$, где a – сторона треугольника, h_a – высота, проведенная к стороне a.

Следствия 1 и 2 можно предложить в виде задач на доказательство по вариантам.

I вариант: В ΔABC $\angle C = 90°$.
Докажите, что $S_{ABC} = AC \cdot BC$.

II вариант: В треугольниках ABC и MNK высоты, проведенные к сторонам AB и MN соответственно, равны.
Докажите, что $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta MNK} = AB : MN$.

Решения задач обсудить, в тетрадях и на доске начертить рисунки и выполнить записи:

Следствия теоремы о площади треугольника

1. Рис. 314. $S_{\Delta ABC} = CA \cdot CB : 2$
2. Рис. 315. Если BH и NE – высоты ΔABC и ΔMNK соответственно и $BH = NE$, то $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta MNK} = AC : MK$.

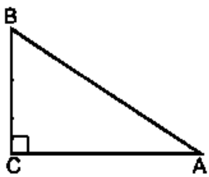


Рис. 314

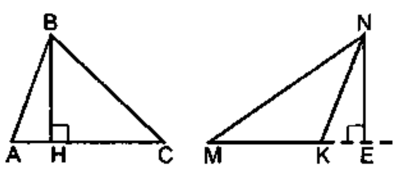


Рис. 315

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 36.

Учащиеся решают задачу самостоятельно, а затем один из учащихся читает свое решение, остальные внимательно его слушают.

– Как вы считаете, правильно ли решена задача?

2. Решить устно задачи № 468 а), б), 471, 474. К задаче № 474 заранее подготовить на доске или на плакате рисунок.

Ответы к задачам:

№ 468 (а) – 77 см^2.

№ 468 (б) – $10\sqrt{3}$ см^2.

№ 471 – а) 22 см^2; б) 1,8 дм^2.

№ 474 – площади равны.

3. Решить задачу № 470 на доске и в тетрадях учащихся. Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 470

$S_\Delta = 1/2a \cdot h_a = 1/2 \cdot 7{,}5 \cdot 2{,}4 = 9$ (см2),

$S_\Delta = 1/2b \cdot h_b \Rightarrow h_b = \dfrac{2S_\Delta}{b} = \dfrac{2\cdot 9}{3{,}2} = 5{,}625$ (см).

Ответ: 5,625 см.

Наводящие вопросы:

– К какой из двух сторон проведена высота, равная 2,4 см?
– Напишите формулу для вычисления высоты, проведенной к меньшей стороне.
– Известно ли значение площади данного треугольника? Как ее можно вычислить?

4. Решить самостоятельно задачи № 472, 475.

Краткое решение задач

Задача № 472

$S_\Delta = 1/2a \cdot b$, $a = 7$, $b = 12x$.

$S = 1/2 \cdot 7x \cdot 12x = 168 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 14$ см, $b = 24$ см.

Задача № 475

Указание: нужно разделить отрезок BC на три равные части BK, KE, EC, используя теорему Фалеса (см. рис. 316).

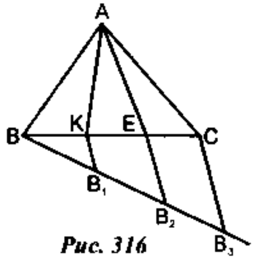


Рис. 316

Дополнительные задачи

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. На сторонах AC, AB и BC соответственно взяты точки M, P, K так, что четырехугольник $CMPK$ – квадрат, $BC = 6$ см, $AC = 14$ см. Найдите сторону MC.

Решение (рис. 317):

Пусть $CM = x$ (см), тогда $AM = 14 - x$ (см), $BK = 6 - x$ (см).

$S_{ABC} = AC \cdot CB : 2 = 14 \cdot 6 : 2 = 42$ (см^2).

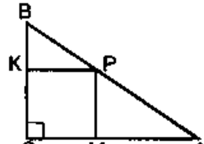


Рис. 317

$S_{BKP} = BK \cdot KP : 2 = (6 - x) \cdot x : 2$ (см^2),
$S_{CKPM} = x^2$ (см^2), $S_{MPA} = MA \cdot MP : 2 = (14 - x) \cdot x : 2$ (см^2),
$S_{ABC} = S_{BKP} + S_{CKPM} + S_{MPA} = (6 - x) \cdot x : 2 + x^2 + (14 - x) \cdot x : 2 =$
$= 3x - x^2/2 + x^2 + 7x - x^2/2 = 10x = 42$,
откуда $x = 4{,}2$, т. е. $MC = 4{,}2$ см.

Ответ: $MC = 4{,}2$ см.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ отмечена точка M. Докажите, что сумма площадей треугольников AMD и BMC равна половине площади параллелограмма.

Решение (рис. 318):

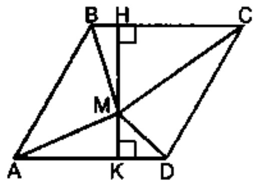


Рис. 318

$S_{BMC} = BC \cdot MH : 2$, $S_{AMD} = AD \cdot MK : 2$.
$ABCD$ – параллелограмм, поэтому $AD = BC$, тогда:
$S_{BMC} + S_{AMD} = BC \cdot MH : 2 + AD \cdot MK : 2 =$
$= AD \cdot (MH + MK) : 2 = AD \cdot HK : 2 =$
$= S_{ABCD} : 2$.
$MH + MK = HK$, т. к. точки H, M, K лежат на одной прямой (прямая, проведенная перпендикулярно к прямой AD через точку M, перпендикулярна и прямой BC, т. к. $AD \parallel BC$ по определению параллелограмма).

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 52, вопрос 5;

Решить задачи № 468 в), г), 473, 469 и задачу № 37 из рабочей тетради.

Дополнительные задачи:

1. Докажите, что диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника, имеющих одинаковую площадь.
2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O, которая удалена от прямой CD на 4 см. Найдите площадь треугольника AOB, если $CD = 8$ см.

Урок 21
Площадь треугольника

Цели урока:

- Рассмотреть теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

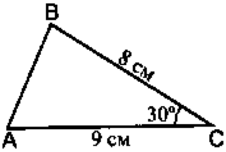


Рис. 319

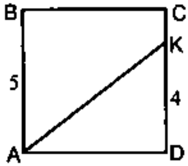


Рис. 320

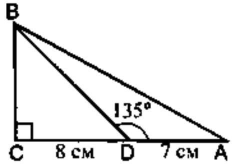


Рис. 321

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Два ученика готовят теоретические вопросы у доски, в это время остальные учащиеся решают задачи. После того как учащиеся закончили решение задач, идет самопроверка по готовым ответам (I уровень) или по готовым решениям (II уровень), если в этом есть необходимость.

Далее класс слушает доказательства теорем, подготовленных у доски.

– Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника.
– Выведите формулу для вычисления площади прямоугольного треугольника.
– Докажите, что если высоты двух треугольников равны, то их площади относятся как основания.

Решение задач (письменно с последующей проверкой)

I уровень

1. Рис. 319.
   Найти: S_{ABC}.
2. Рис. 320. $ABCD$ – квадрат, $AB = 5$ см, $KD = 4$ см.
   Найти: S_{ABCK}.
3. Рис. 321.
   Найти: S_{ABC}.
4. Рис. 322. $AB = 10$.
   Найти: CD.
5. Решить задачу № 38 из рабочей тетради.

Ответы к задачам:

1. 36 см^2; **2.** 15 см^2;
3. 120 см^2; **4.** 4,8 см.

II уровень

1. В четырехугольнике диагонали равны 8 см и 12 см и пересекаются под углом 30° друг к другу. Найдите площадь этого четырехугольника.

Решение (рис. 323):

Проведем $BK \perp AC$, $DE \perp AC$, тогда $S_{ABC} = AC \cdot BK : 2$,
$S_{ADC} = AC \cdot DE : 2$, значит:
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = AC \cdot BK : 2 + AC \cdot DE : 2 = AC \cdot (BK + DE) : 2$.
ΔBKO – прямоугольный, в нем $\angle BOK = 30°$, тогда $BK = BO : 2$.

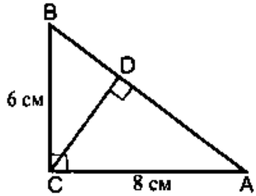


Рис. 322

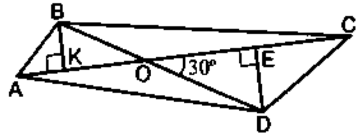


Рис. 323

ΔDEO – прямоугольный, в нем $\angle DOE = 30°$, тогда $DE = DO : 2$.
$S_{ABCD} = AC \cdot (BK + DE) : 2 = AC \cdot (BO : 2 + DO : 2) : 2 =$
$= AC \cdot (BO + DO) : 4 = AC \cdot BD : 4 = 8 \cdot 12 : 4 = 24$ (см^2).

Ответ: 24 см^2.

2. Точка E – середина стороны AB треугольника ABC, а точки M и H делят сторону BC на три равные части, $BM = MH = HC$. Найдите площадь треугольника EMH, если площадь треугольника ABC равна S.

Решение (рис. 324):

Высота ΔABC и ΔBCE, проведенная к сторонам AB и BE соответственно – это один и тот же отрезок, т. е. высоты ΔABC и ΔBCE равны, тогда

$S_{\Delta ABC} : S_{\Delta BCE} = AB : BE = 2 : 1$, т. е. $S_{\Delta BCE} = S : 2$.

Высоты ΔEBM, ΔEMH, ΔEHC равны, их площади относятся так же, как $BM : MH : CH$, а т. к. $BM = MH = CH$, то

$S_{EBM} = S_{EMH} = S_{EHC} = S_{BCE}/3 = S : 3 : 2 = S : 6$.

Ответ: $S : 6$.

Проверка домашнего задания

Проверить решение дополнительных домашних задач. (Индивидуально, пока учащиеся у доски готовят теоретические вопросы, а остальные решают задачи.)

Задача № 1 (рис. 325)

Через точку O пересечения диагоналей проведем прямые $MK \perp AB$ и $NP \perp BC$, тогда т. к. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, то $NP \perp AD$, значит OM, ON, OK, OP – высоты треугольников AOB, BOC, COD, DOA.

$S_{BOC} + S_{AOD} = BC \cdot ON : 2 + AD \cdot OP : 2 = BC \cdot (ON + OP) : 2 = BC \cdot NP : 2 = S_{ABCD} : 2$ ($BC = AD$, NP – высота параллелограмма, т. к. $NP \perp BC$, $NP \perp AD$).

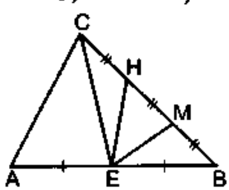


Рис. 324

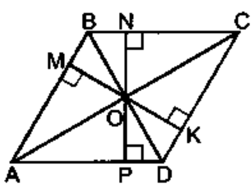


Рис. 325

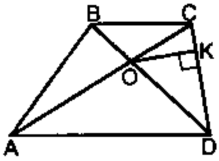


Рис. 326

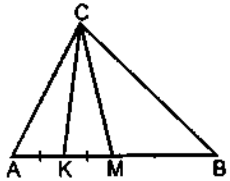


Рис. 327

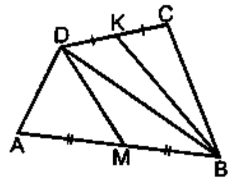


Рис. 328

Тогда $S_{BOC} = S_{AOD} = S_{ABCD} : 4$ ($\Delta BOC = \Delta DOA$ по двум сторонам и углу между ними).

$S_{AOB} + S_{COD} = AB \cdot OM : 2 + CD \cdot OK : 2 = AB \cdot (OM + OK) : 2 = AB \cdot MK : 2 = S_{ABCD} : 2$ ($AB = CD$, MK – высота параллелограмма).

Тогда $S_{AOB} = S_{COD} = S_{ABCD} : 4$ ($\Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними).

Получили $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{DOA} = S_{ABCD} : 4$, т. е. диагонали параллелограмма делят его на четыре треугольника, имеющих одинаковую площадь.

Задача № 2 (рис. 326)

$S_{ABD} = S_{ACD}$, т. к. у них высоты, проведенные из вершин B и C к стороне AD равны, а основание AD общее.

$S_{ABD} = S_{AOB} + S_{AOD}$, $S_{ACD} = S_{AOD} + S_{COD}$, отсюда т. к. $S_{ABD} = S_{ACD}$, то $S_{AOB} = S_{COD}$.

$S_{COD} = OK \cdot CD : 2 = 4 \cdot 8 : 2 = 16$ (см^2), тогда $S_{AOB} = 16$ см^2.

Ответ: $S_{AOB} = 16$ см^2.

Решение задач с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

(Фронтальная работа с классом.)

1. Рис. 327. CM – медиана ΔABC, CK – медиана ΔACM.
   Найти: $S_{ACM} : S_{ABC}$; $S_{ACM} : S_{BCK}$; $S_{ACK} : S_{BCK}$.
2. Рис. 328. M – середина AB, K – середина CD.
   $ABCD$ – выпуклый четырехугольник.
   Доказать: $S_{MBKD} = S_{ABCD} : 2$.

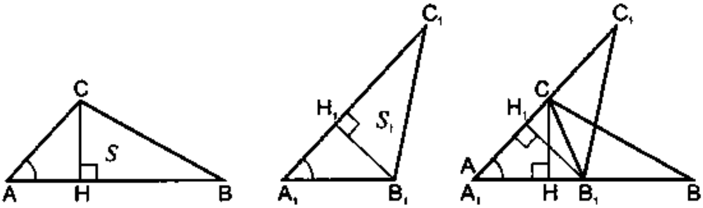
III. Изучение нового материала

Сформулировать и доказать теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, вместе с учащимися.

Теорема: Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведение сторон, заключающих равные углы.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} = S$.

Доказать: $\dfrac{S}{S_1} = \dfrac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.



а) б) в)

Рис. 329

Доказательство (рис. 329):

1) Наложим $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC (A и A_1 совпадают, A_1B_1 лежит на луче AB, A_1C_1 – на луче AC).

2) $S = S_{ABC} = AB \cdot CH,\ S_{A_1B_1C_1} = A_1B_2 \cdot CH \Rightarrow \dfrac{S}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$ (1)

3) $S_{AB_1C} = AC \cdot B_1H_1,\ S_1 = S_{A_1B_1C_1} = A_1C_1 \cdot B_1H_1 \Rightarrow \dfrac{S_{AB_1C}}{S_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ (2)

4) Перемножим равенства (1) и (2):

$$\frac{S}{S_{A_1B_1C_1}} \cdot \frac{S_{AB_1C}}{S_1} = \frac{S}{S_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \cdot \frac{AC}{A_1C_1},\ \text{т. е.}\ \frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

IV. Закрепление изученного материала

Решить устно задачи:

1. Рис. 330. *Дано*: $\angle A = \angle K$, $AC = 5$ см, $AB = 3$ см, $KN = 7$ см, $KM = 2$ см. *Найти*: $S_{ABC} : S_{KMN}$.

2. Рис. 331.
Дано: $OA = 8$ см, $OB = 6$ см, $OC = 5$ см, $OD = 2$ см, $S_{AOB} = 20$ см^2.
Найти: S_{COD}.

Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 39, 40.

Решить самостоятельно задачу:

Площадь одного равностороннего треугольника в 3 раза больше, чем площадь другого равностороннего треугольника. Найдите сторону второго треугольника, если сторона первого равна 1.

Решить самостоятельно задачу № 479 б)

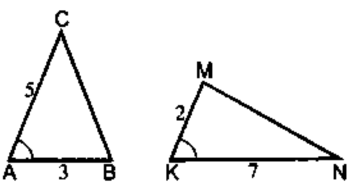


Рис. 330

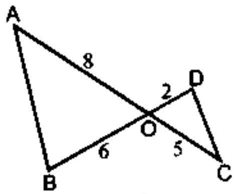


Рис. 331

V. Самостоятельная работа обучающего характера

I уровень

I вариант

1. Две стороны треугольника равны 12 см и 9 см, а угол между ними 30°. Найдите площадь треугольника.

2. Рис. 332.

Дано: $AO = 4$; $BO = 9$; $CO = 5$; $DO = 8$. $S_{AOC} = 15$.

Найти: S_{BOD}.

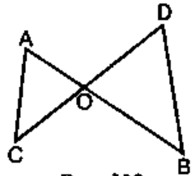


Рис. 332

II вариант

1. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 6 см и 8 см, а угол между ними 30°.

2. Рис. 333. *Дано*: $AO = 10$; $CO = 12$; $DO = 6$; $BO = 8$, $S_{BOD} = 14$.

Найти: S_{AOC}.

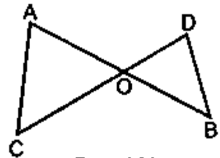


Рис. 333

II уровень

I вариант

1. В треугольнике ABC $\angle A = 45°$, $BC = 10$ см, а высота BD делит сторону AC на отрезки $AD = 6$ см, $DC = 8$ см. Найдите площадь треугольника и высоту, проведенную к стороне BC.

2. Рис. 334. *Дано*: $BO = AO$, $OC = 2OD$, $S_{AOC} = 12$ см^2.

Найти: S_{BOD}.

II вариант

1. В треугольнике ABC $\angle C = 45°$, $AB = 10$ см, а высота AD делит сторону CB на отрезки $CD = 8$ см, $DB = 6$ см. Найдите площадь треугольника и высоту, проведенную к стороне AB.

2. Рис. 335. *Дано*: $OB = OC$, $OD = 3OA$, $S_{AOC} = 16$ см^2.

Найти: S_{BOD}.

III уровень

I вариант

1. В треугольнике ABC $\angle A = 75°$, $\angle B = 30°$, $AB = 10$ см. Найдите площадь треугольника.

2. Рис. 336. *Дано*: $OA = AB$, $AC \parallel BD$.

Доказать: $S_{OBC} = S_{OAD}$.

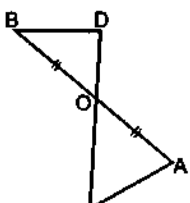


Рис. 334

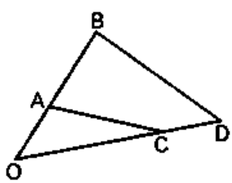


Рис. 335

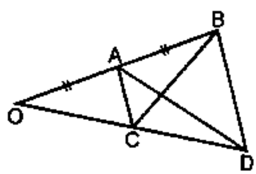


Рис. 336

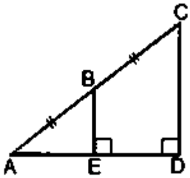


Рис. 337

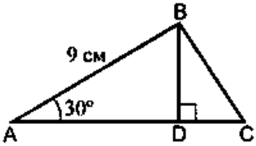


Рис. 338

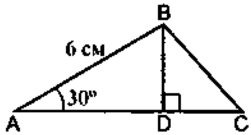


Рис. 339

II вариант

1. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B = 75°$. Найдите BC, если площадь треугольника равна 36 см^2.

2. Рис. 337. *Дано*: $AB = BC$, $BE \perp AD$, $CD \perp AD$.

Доказать: $S_{ACD} = 4S_{ABE}$.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

По окончании работы проводится самопроверка. Ответы и указания выписываются на доске.

I уровень

I вариант

1. Рис. 338.

В ΔABD $BD = 4{,}5$ см.

$S_{ABC} = AC \cdot BD : 2 = 12 \cdot 4{,}5 : 2 = 27$ (см^2).

Ответ: $S_{ABC} = 27$ см^2.

2. $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные,

$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \frac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} = 4 \cdot 5 : 9 : 8 = 15 : S_{BOD};$$

$S_{BOD} = 9 \cdot 8 \cdot 15 : 4 : 5 = 54$ (см^2).

Ответ: $S_{BOD} = 54$ см^2.

II вариант

1. Рис. 339. В ΔABD $BD = 3$ см, $S_{ABC} = AC \cdot BD : 2 = 12$ (см^2).

Ответ: $S_{ABC} = 12$ см^2.

2. В ΔAOC и ΔBOD $\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные,

$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \frac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} = \frac{10 \cdot 12}{8 \cdot 6} = \frac{S_{AOC}}{14};$$

$S_{AOC} = 10 \cdot 12 \cdot 14 : 8 : 6 = 35$ (см^2).

Ответ: $S_{AOC} = 35$ см^2.

II уровень

I вариант

1. Рис. 340.

ΔABD – прямоугольный и равнобедренный, $BD = 6$ см,

$S_{ABC} = AC \cdot BD : 2 = 42$ (см^2).

$S_{ABC} = BC \cdot h_{BC}/2 = 42$; $h_{BC} = 2 \cdot 42 : 10 = 8{,}4$ (см)

Ответ: 42 см^2; 8,4 см.

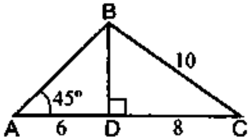


Рис. 340

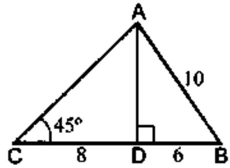
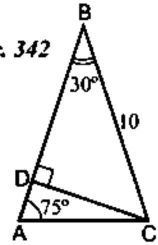


Рис. 341

Рис. 342



2. $\angle BOD = \angle AOC$ как вертикальные, поэтому

$$\frac{S_{BOD}}{S_{AOC}} = \frac{BO \cdot DO}{AO \cdot CO} = \frac{BO \cdot DO}{BO \cdot 2 \cdot DO} = 1/2 = S_{BOD} : 12,\ S_{BOD} = 6\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $S_{BOD} = 6$ см^2.

II вариант

1. Рис. 341. ΔCAD – прямоугольный и равнобедренный, $AD = 8$ см, $S_{ABC} = CB \cdot AD : 2 = 56$ (см^2).
   $S_{ABC} = AB \cdot h_{AB}/2 = 56$; $h_{AB} = 56 \cdot 2 : 10 = 11{,}2$ (см)

Ответ: 56 см^2; 11,2 см.

2. В ΔAOC и ΔBOD $\angle O$ – общий, поэтому

$$\frac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \frac{AO \cdot CO}{BO \cdot DO} = \frac{AO \cdot CO}{CO \cdot 3 \cdot AO} = \frac{1}{3} = \frac{16}{S_{BOD}},\ S_{BOD} = 16\ (\text{см}^2).$$

Ответ: $S_{BOD} = 16$ см^2.

III уровень

I вариант

1. Рис. 342. $\angle C = 75°$, ΔABC – равнобедренный, $BC = 10$ см.
   Из ΔCDB $CD = 5$ см, $S_{ABC} = AB \cdot CD : 2 = 25$ (см^2).

Ответ: $S_{ABC} = 25$ (см^2).

2. По теореме Фалеса $OC = CD$, тогда $OD = 2OC$, $OB = 2OA$.

$$\frac{S_{OBC}}{S_{OAD}} = \frac{OB \cdot OC}{OA \cdot OD} = \frac{2 \cdot OA \cdot OC}{OA \cdot 2 \cdot OC} = 1,\ \text{т. е. } S_{OBC} = S_{OAD}.$$

II вариант

1. Рис. 343. ΔABC – равнобедренный, $\angle B = 30°$, тогда в ΔCDB $CD = BC : 2$.
   $S_{ABC} = AB \cdot CD : 2 = BC/2 \cdot BC/2 = 36$ (см^2).
   $BC = 12$ (см).

Ответ: $BC = 12$ см.

2. $BE \parallel CD$, по теореме Фалеса $AE = ED$, тогда $AD = 2AE$, $AC = 2AB$.

$$\frac{S_{ACD}}{S_{ABE}} = \frac{AC \cdot AD}{AB \cdot AE} = \frac{2 \cdot AB \cdot 2 \cdot AE}{AB \cdot AE} = 4,$$

т. е. $S_{ACD} = 4S_{ABE}$.

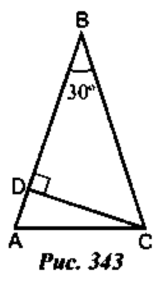


Рис. 343

VI. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 52, вопрос 6;

Решить задачи № 479 а), 476 а), 477 и задачу № 41 из рабочей тетради.

Дополнительная задача (рис. 344):

$AO = 3$ см, $BO = 6$ см, $OC = 5$ см, $OD = 4$ см, $S_{AOC} + S_{BOD} = 39$ см^2.

Найти: S_{AOC}.

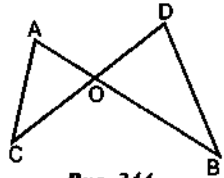


Рис. 344

Урок 22
Площадь трапеции

Цели урока

- Рассмотреть теорему о площади трапеции и показать ее применение в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Сформировать и доказать теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу. Один из наиболее подготовленных учащихся готовится у доски, затем, после проверки домашнего задания его ответ слушает весь класс с целью закрепления доказательства данной теоремы.

Проверка домашнего задания

Проверить решения дополнительной домашней задачи и задачи 476 а). Решения задач заранее подготавливаются учащимися на доске.

Задача № 476 (а)

Решение (рис. 345):

Диагонали ромба разбивают его на четыре равных прямоугольных треугольника $\Rightarrow$ площади этих треугольников равны.

$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{AOB} = 4 \cdot 1/2 \cdot AO \cdot OB$.

Так как диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, то $AO = 1/2\ AC$, $OB = 1/2\ BD$, значит, $S_{ABCD} = 4 \cdot 1/2 \cdot 1/2\ AC \cdot 1/2\ BD =$

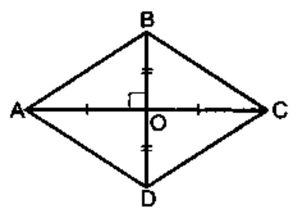


Рис. 345

$= 1/2\ AC \cdot BD$, т. е. площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

а) $d_1 = 3{,}2$ дм, $d_2 = 14$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\text{ромба}} = 1/2 d_1 \cdot d_2 = 1/2 \cdot 3{,}2 \cdot 14 = 224$ (см^2).

Ответ: 224 см^2.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о треугольниках *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA*?
– Чему равна площадь одного треугольника? А площадь ромба?
– Выразите стороны треугольника *AOB* через диагонали ромба.

Дополнительная задача

Решение (рис. 346):

Треугольники *AOC* и *BOD* имеют равные углы ($\angle AOC = \angle BOD$ как вертикальные) $\Rightarrow \dfrac{S_{AOC}}{S_{BOD}} = \dfrac{OC \cdot OA}{OB \cdot OD} = \dfrac{3 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \dfrac{5}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AOC} = \dfrac{5}{8} S_{BOD}$. Т. к. $S_{AOC} + S_{BOD} = 39$, то $\dfrac{5}{8} S_{BOD} + S_{BOD} = 39$,

$S_{BOD} = 24$ (см^2) $\Rightarrow S_{AOC} = 5 : 8 \cdot 24 = 15$ (см^2).

Ответ: 15 см^2.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о площадях треугольников, имеющих равные углы?
– Выразите площадь одного из треугольников через площадь другого.

Решение задачи с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

(Задача решается самостоятельно с последующим коллективным обсуждением решения.)

Задача: Найдите площадь трапеции *ABCD*, если основания *AD* и *BC* равны соответственно 12 см и 8 см, боковая сторона *AB* равна 6 см, $\angle A = 30°$.

Решение (рис. 347):

Проведем высоту *BK* в треугольнике *ABD*, которая равна высоте в треугольнике *BCD*, т. е. $BK = DH$.

$S_{ABD} = AD \cdot BK : 2$, $S_{BCD} = BC \cdot DH : 2$.

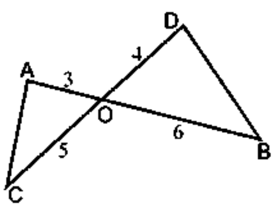


Рис. 346

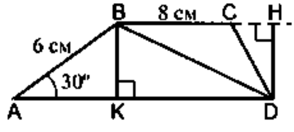


Рис. 347

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = AD \cdot BK : 2 + BC \cdot DH : 2.$

$BKDH$ – прямоугольник, поэтому $BK = DH$, тогда:

$S_{ABCD} = BK \cdot (AD + BC) : 2.$

Найдем BK из прямоугольного треугольника ABK, в котором $\angle A = 30°$, $AB = 6$ см: $BK = AB/2 = 3$ см.

$S_{ABCD} = 3 \cdot (10 + 8) : 2 = 27$ (см^2)

Ответ: $S_{ABCD} = 27$ см^2.

– Проведите высоты треугольников ABD и BCD из вершин B и D. Что вы можете о них сказать?
– Найдите площадь трапеции, как сумму площадей треугольников ABD и BCD.
– Как найти высоту BK треугольника ABD?

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие высоты трапеции.

Определение: Перпендикуляр, проведенный из любой точки одного из оснований к прямой, содержащей другое основание, называют высотой трапеции.

BH, DH_1 – высоты трапеции $ABCD$.
$BH = DH_1$ (рис. 348).

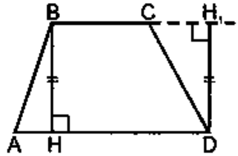


Рис. 348

2. *Задача*: Найти площадь трапеции $ABCD$, если основания AD и BC равны a и b соответственно, а высота – h.

Задачу можно предложить решить самостоятельно или в небольших группах, затем обсудить решение задачи, на доске и в тетрадях учащихся записать в виде теоремы с ее доказательством:

Теорема: Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту.

Дано: $ABCD$ – трапеция, AD и BC – основания, BH – высота, S – площадь трапеции.

Доказать: $S = \frac{1}{2} \cdot BH \cdot (AD + BC)$.

Доказательство (рис. 349):

1) Проведем диагональ BD и вторую высоту трапеции DH_1.
2) $S = S_{ABD} + S_{BCD}$.
3) $S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DH_1$.
4) HBH_1D – прямоугольник $\Rightarrow BH = DH_1$.
5) $S = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot DH_1 = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot BH = \frac{1}{2} BH \cdot (AD + BC)$.

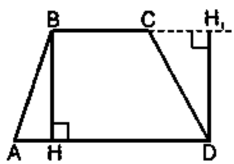


Рис. 349

– Итак, мы вывели формулу для вычисления площади трапеции:

$$\boxed{S_{\text{трап}} = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h}$$

где a и b – основания трапеции, h – высота трапеции.

IV. Закрепление изученного материала

Решить устно № 480 а).

Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 42. Учащиеся работают самостоятельно, затем один из них читает свое решение, остальные проверяют, исправляют свои ошибки и ошибки отвечающего.

Решить на доске и в тетрадях задачу № 482. Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 482

Дано: $ABCD$ – трапеция, $AB = CD$, $\angle B = 135°$, BK – высота, $AK = 1{,}4$ см, $KD = 3{,}4$ см (рис. 350).

Найти: S_{ABCD}.

Решение:

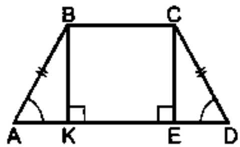


Рис. 350

а) В ΔABK $\angle K = 90°$, $\angle ABK = 135° - \angle KBC = 45°$, тогда $\angle A = 90° - \angle ABK = 45°$, ΔABK – равнобедренный, $BK = AK = 1{,}4$ см.

б) Проведем высоту CE, тогда $KBCE$ – прямоугольник и $BC = KE$, а ΔDCE – прямоугольный, $\angle D = 45°$ треугольник.

в) $\Delta ABK = \Delta DCE$ по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$), тогда $DE = AK = 1{,}4$ см, значит $KE = 2$ см, $BC = 2$ см.

г) $AD = AK + KD = 1{,}4 + 3{,}4 = 4{,}8$ (см)

$S_{ACM} = (BC + AD) : 2 \cdot BK = (2 + 4{,}8) : 2 \cdot 1{,}4 = 4{,}76$ (см^2)

Ответ: $S_{ABCD} = 4{,}76$ см^2.

Наводящие вопросы:

– Какая формула используется для вычисления площади трапеции?

– Что нам необходимо найти для вычисления площади трапеции?

– Как можно найти основания AD и BC?

Решить самостоятельно задачи:

1. Высота и основания трапеции относятся как 5 : 6 : 4. Найдите меньшее основание трапеции, если площадь трапеции равна 88 см^2, а высота меньше оснований. (*Ответ*: 10 см.)
2. Высота трапеции равна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания. Найдите высоту трапеции, если ее площадь равна 54 см^2. (*Ответ*: 6 см.)
3. Основания равнобедренной трапеции 12 см и 16 см, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции. (*Ответ*: $S_{\text{трап}} = 169$ см^2.)

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 53, вопрос 7;

Повторить формулы для вычисления площади прямоугольника, квадрата, параллелограмма, ромба, треугольника, трапеции;

Решить задачи № 480 (б, в), 481, 478, 476 (б).

Урок 23
Решение задач на вычисление площадей фигур

Цели урока:

- Закрепить теоретический материал по теме «Площадь».
- Совершенствовать навыки решения задач на вычисление площадей фигур.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания

Проверить решение задачи № 478.

Один из учащихся заранее готовит решение задачи на доске.

Задача № 478

Дано: $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $CA \perp BD$.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Доказательство (рис. 351):

Треугольники AOB, BOC, COD, AOD прямоугольные. Площадь прямоугольного треугольника вычисляется по формуле: $S = \frac{1}{2} ab$, где a и b – катеты треугольника,

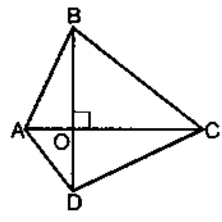


Рис. 351

поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO$, $S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot CO$,

$S_{COD} = \frac{1}{2} CO \cdot DO$, $S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot DO$.

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot BO + \frac{1}{2} BO \cdot CO +$$

$$+ \frac{1}{2} CO \cdot DO + \frac{1}{2} AO \cdot DO = \frac{1}{2} BO\,(AO + BO) + \frac{1}{2} DO\,(CO + AO) =$$

$$= \frac{1}{2}\,(BO + DO) \cdot (AO + BO) = \frac{1}{2} BD \cdot AB,$$

т. к. $BO + DO = BD$, $AO + BO = AB$.

Наводящие вопросы:

- Существует ли формула для вычисления площади произвольного четырехугольника?
- Какие способы вычисления площадей вам известны?
- На какие геометрические фигуры, площади которых вычисляются по известным нам формулам, разбит выпуклый четырехугольник?
- Как вычислить площадь каждой фигуры? А площадь всего четырехугольника?
- Упростите полученное выражение.

Теоретический тест

Работа выполняется на двух листочках, один из которых сдается учителю на проверку, второй остается ученику для самопроверки, которая будет проведена непосредственно по окончанию работы.

I вариант

1. Выберите верные утверждения:
   а) площадь прямоугольника равна произведению двух его сторон;
   б) площадь квадрата равна квадрату его стороны;
   в) площадь прямоугольника равна удвоенному произведению двух его соседних сторон.
2. Закончите фразу: Площадь ромба равна половине произведения...
   а) его сторон;
   б) его стороны и высоты, проведенной к этой стороне;
   в) его диагоналей.
3. По формуле $S = a \cdot h_a$ можно вычислить площадь:
   а) параллелограмма;
   б) треугольника;
   в) прямоугольника.
4. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD и высотой BH вычисляется по формуле:
   а) $S = AB : 2 \cdot CD \cdot BH$;
   б) $S = (AB + BC) : 2 \cdot BH$;
   в) $S = (AB + CD) : 2 \cdot BH$;
5. Выберите верное утверждение.
   Площадь прямоугольного треугольника равна:
   а) половине произведения его стороны на какую-либо высоту;
   б) половине произведения его катетов;
   в) произведению его стороны на проведенную к ней высоту.
6. В треугольниках ABC и MNK $\angle B = \angle N$. Отношение площадей треугольников ABC и MNK равно:
   а) $\dfrac{AB \cdot BC}{MN \cdot NK}$; б) $\dfrac{AB \cdot AC}{MN \cdot MK}$; в) $\dfrac{BC \cdot AC}{NK \cdot MK}$.

7. В треугольниках MNK и DOS высоты NE и OT равны. Тогда $S_{MNK} : S_{POS} = \ldots$
   а) $MN : PO$; б) $MK : PS$; в) $NK : OS$.

II вариант

1. Выберите верные утверждения:
   а) Площадь квадрата равна произведению его сторон.
   б) Площадь прямоугольника равна произведению его противолежащих сторон.
   в) Площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон.
2. Закончите фразу: Площадь параллелограмма равна произведению…
   а) двух его соседних сторон;
   б) его стороны на высоту, проведенную к этой стороне;
   в) двух его сторон.
3. По формуле $S = d_1d_2 : 2$ можно вычислить площадь:
   а) параллелограмма;
   б) треугольника;
   в) ромба.
4. Площадь трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD и высотой CH вычисляется по формуле:
   а) $S = CH \cdot (BC + AD) : 2$;
   б) $S = (AB + BC) \cdot CH : 2$;
   в) $S = (BC + CD) \cdot CH : 2$;
5. Выберите верное утверждение.
   Площадь треугольника равна:
   а) половине произведения его сторон;
   б) половине произведения двух его сторон;
   в) произведению его стороны на какую-либо высоту.
6. В треугольниках ABC и DEF $\angle C = \angle F$.
   Отношение площадей треугольников ABC и DEF равно:
   а) $\dfrac{AC \cdot AB}{DE \cdot DF}$; б) $\dfrac{AB \cdot AC}{DE \cdot EF}$; в) $\dfrac{AC \cdot BC}{DF \cdot EF}$.
7. В треугольниках DEF и TRQ высоты DA и TB равны. Тогда $S_{DEF} : S_{TRQ} = \ldots$
   а) $EF : RQ$; б) $DE : TR$; в) $EF : RT$.

Ответы к тесту

	1	2	3	4	5	6	7
I вариант	б	в	а	в	б	а	б
II вариант	в	б	в	а	б	в	а

III. Решение задач

Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 43. Учащиеся работают самостоятельно, затем один из учащихся читает свое решение, остальные исправляют свои ошибки и указывают ошибки отвечающего.

Решить на доске и в тетрадях задачи (при решении каждой задачи один из учащихся по указанию учителя работает у доски, остальные в тетрадях).

1. В трапеции *ABCM* одно из оснований в 3 раза меньше другого, а высота составляет 75% большего основания. Площадь трапеции равна 72 см^2. Найдите основания и высоту трапеции.

Краткое решение (рис. 352):

Пусть $BC = x$, $AD = 3x$. Тогда $BH = 0{,}75 \cdot 3x = 2{,}25x$.

$S_{ABCD} = 1/2 \cdot 2{,}25x \cdot (x + 3x) = 4{,}5x^2 = 72$

$x^2 = 16$; $x = 4$.

$BC = 4$, $AD = 12$, $BH = 9$.

Ответ: 4 см, 12 см, 9 см.

Наводящие вопросы:

– Какая формула используется для вычисления площади трапеции?

– Выразите основания и высоту трапеции через переменную x и составьте уравнение, используя условия задачи.

2. В параллелограмме *ABCD* на стороне *AD* отмечена точка *M* такая, что $AM : MD = 3 : 2$. Найдите площадь ΔABM, если площадь параллелограмма равна 60 см^2.

Краткое решение (рис. 353):

$S_{ABCD} = 60$ см^2.

$AM : MD = 3 : 2$.

$S_{BMC} = 1/2\, S_{ABCD} = 30$ см^2.

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CDM}} = \frac{AM \cdot BH_1}{MD \cdot CH_1} = \frac{AM}{MD} = \frac{3}{2},\ \text{так как } BH_1 = CH_2.$$

$S_{ABM} + S_{CDM} = S_{ABCD} - 30 = 30 \Rightarrow S_{ABM} = 18$ см^2.

Ответ: 18 см^2.

Наводящие вопросы:

– Разбейте параллелограмм *ABCD* на фигуры, площади которых можно вычислить.

– Какую часть занимает ΔBMC от параллелограмма?

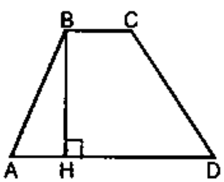


Рис. 352

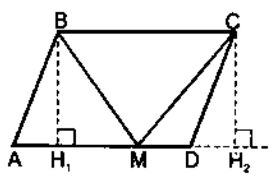


Рис. 353

– Чему равно отношение площадей треугольников ABM и CDM?
– Найдите площадь треугольника ABM.

Решить самостоятельно задачи:

1. В параллелограмме $KMPT$ диагональ MT перпендикулярна стороне MK, $KM = 13$ см, $MT = 5$ см. Найдите площадь параллелограмма и его высоты, если $MP = 14$ см.

(*Ответ*: $S = 65$ см^2, высоты равны 5 см и $4\frac{9}{14}$ см.)

2. Стороны параллелограмма равны 12 см и 15 см, а угол между ними 30°. Найдите площадь параллелограмма.
(*Ответ*: 90 см^2.)

3. В ΔKMP высота MB делит сторону KP на отрезки 6 см и 8 см, $\angle MKP = 45°$. Найдите площадь ΔKMP.
(*Ответ*: $S_{KMP} = 42$ см^2.)

4. Периметр ромба $ABCK$ равен 68 см, периметр ΔABC равен 50 см, а периметр ΔBCK равен 64 см. Найдите: а) диагонали AC и BK; б) площадь ромба.
(*Ответ*: а) 16 см; 30 см; б) 240 см^2.)

IV. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Решить задачи № 466, 467, 476 б) из учебника задачу № 44 из рабочей тетради.

Дополнительная задача: В равнобедренной трапеции $ABCD$ проведены высоты BK к стороне AD и высота DH к стороне BC. Найдите площадь четырехугольника $BKDH$, если площадь трапеции равна 89 дм^2. (*Ответ*: 89 дм^2.)

Урок 24
Решение задач на нахождение площади

Цели урока:

- Закрепить знания и умения по теме «Площадь».
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Решение задач по готовым чертежам (фронтальная работа).

I уровень: № 1, 2, 3, 5, 7, 9 (устно);

II уровень: № 1–9 (письменно с последующей самопроверкой).

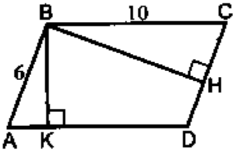


Рис. 354

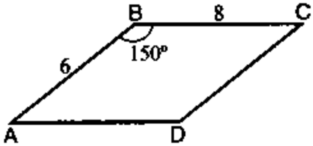


Рис. 355

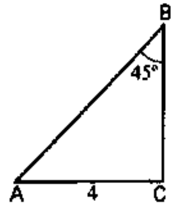


Рис. 356

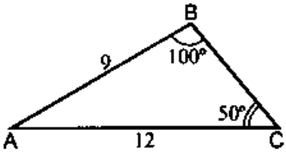


Рис. 357

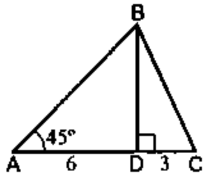
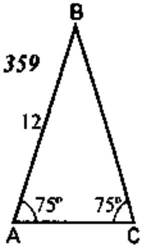


Рис. 358

Рис. 359



1. Рис. 354. $ABCD$ – параллелограмм, $BH = 8$ см.
   Найти: BK.
2. Рис. 355. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: S_{ABCD}.
3. Рис. 356.
   Найти: S_{ABC}.
4. Рис. 357.
   Найти: S_{ABC}.
5. Рис. 358.
   Найти: S_{ABC}.
6. Рис. 359.
   Найти: S_{ABC}.
7. Рис. 360. $AC = 12$; $S_{ABCD} = 48$.
   Найти: BD.
8. Рис. 361. $ABCD$ – трапеция, $BC : AD = 2 : 3$; $BK = 6$, $S_{ABCD} = 60$.
   Найти: BC, AD.
9. Рис. 362. ***Найти***: S_{ABCD}.

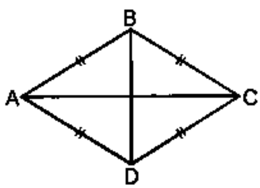


Рис. 360

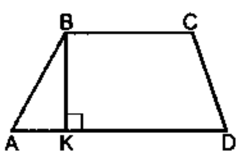


Рис. 361

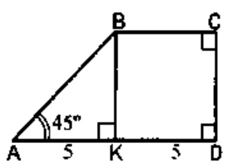


Рис. 362

Ответы к задачам

1. $BK = 4{,}8$. **2.** $S_{ABCD} = 24$.
3. $S_{ABC} = 8$. **4.** $S_{ABC} = 27$.
5. $S_{ABC} = 27$. **6.** $S_{ABC} = 36$.
7. $BD = 8$. **8.** $BC = 8$; $AD = 12$.
9. 37,5.

III. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Сторона параллелограмма равна 21 см, а высота, проведенная к ней 15 см. Найдите площадь параллелограмма.
2. Сторона треугольника равна 5 см, а высота, проведенная к ней, в 2 раза больше стороны. Найдите площадь треугольника.
3. В трапеции основания равны 6 и 10 см, а высота равна полусумме длин оснований. Найдите площадь трапеции.
4. Стороны параллелограмма равны 6 и 8 см, а угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.
5. Диагонали ромба относятся как 2 : 3, а их сумма равна 25 см. Найдите площадь ромба.

II вариант

1. Сторона параллелограмма равна 17 см, а его площадь 187 см^2. Найдите высоту, проведенную к данной стороне.
2. Сторона треугольника равна 18 см, а высота, проведенная к ней, в 3 раза меньше стороны. Найдите площадь треугольника.
3. В трапеции основания равны 4 и 12 см, а высота равна полусумме длин оснований. Найдите площадь трапеции.
4. Стороны параллелограмма равны 4 и 7 см, а угол между ними равен 150°. Найдите площадь параллелограмма.
5. Диагонали ромба относятся как 3 : 5, а их сумма равна 8 см. Найдите площадь ромба.

II уровень

I вариант

1. В равнобедренном треугольнике ABC высота BH равна 12 см, а основание AC в 3 раза больше высоты BH. Найдите площадь ΔABC.
2. В параллелограмме $ABCD$ стороны равны 14 и 8 см, высота, проведенная к большей стороне, равна 4 см. Найдите площадь параллелограмма и вторую высоту.
3. Площадь трапеции равна 320 см^2, а высота трапеции равна 8 см. Найдите основания трапеции, если длина одного из оснований составляет 60 % длины другого.
4. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны соответственно 14 и 18 см. Сторона AB продолжена за точку A на отрезок AM,

равный AB. Сторона BC продолжена за точку C на отрезок KC, равный половине BC. Найдите площадь ΔMBK, если площадь ΔABC равна 126 см^2.

5. В ромбе $ABCK$ из вершин B и C опущены высоты BM и CH на прямую AK. Найдите площадь четырехугольника $MBCH$, если площадь ромба равна 67 см^2.

II вариант

1. В равнобедренном треугольнике ABC высота AH в 4 раза меньше основания BC, равного 16 см. Найдите площадь ΔABC.
2. В параллелограмме $ABCD$ высоты равны 10 и 5 см, площадь параллелограмма равна 60 см^2. Найдите стороны параллелограмма.
3. В равнобокой трапеции $ABCM$ большее основание AM равно 20 см, высота BH отсекает от AM отрезок AH, равный 6 см. Угол BAM равен 45°. Найдите площадь трапеции.
4. В ромбе $ABCD$ на стороне BC отмечена точка K такая, что $KC : BK = 3 : 1$. Найдите площадь ΔABK, если площадь ромба равна 48 см^2.
5. В ΔABM через вершину B проведена прямая d, параллельная стороне AM. Из вершин A и M проведены перпендикуляры AC и MD на прямую d. Найдите площадь четырехугольника $ACDM$, если площадь треугольника ABM равна 23 см^2.

III уровень

I вариант

1. Площадь параллелограмма равна 48 см^2, а его периметр 40 см. Найдите стороны параллелограмма, если высота, проведенная к одной из них, в 3 раза меньше этой стороны.
2. В ромбе $ABCD$ диагонали равны 5 см и 12 см. На диагонали AC взята точка M так, что $AM : MC = 4 : 1$. Найдите площадь треугольника AMD.
3. В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на два отрезка, больший из которых равен 20 см. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12 см.
4. В треугольнике ABC $\angle B = 130°$, $AB = a$, $BC = b$, а в параллелограмме $MPKH$ $MP = a$, $MH = b$, $\angle M = 50°$. Найдите отношение площади треугольника к площади параллелограмма.
5. В трапеции $ABCD$ BC и AD – основания, $BC : AD = 3 : 4$. Площадь трапеции равна 70 см^2. Найдите площадь ΔABC.

II вариант

1. Площадь параллелограмма равна 50 см^2, а его периметр 34 см. Найдите стороны параллелограмма, если одна из них в 2 раза больше проведенной к ней высоты.

2. В прямоугольном ΔABC точка O – середина медианы CH, проведенной к гипотенузе AB, $AC = 6$ см, $BC = 8$ см. Найдите площадь треугольника OBC.
3. В равнобедренной трапеции угол между диагоналями равен 90°, высота трапеции равна 8 см. Найдите площадь трапеции.
4. В треугольнике ABC $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = 15°$, а в треугольнике MPK $KP = x$, $MK = y$, $\angle K = 165°$. Сравните площади этих треугольников.
5. В трапеции $ABCD$ BC и AD – основания, $BC : AD = 4 : 5$. Площадь треугольника ACD равна 35 см^2. Найдите площадь трапеции.

Примечание:

Самостоятельная работа третьего уровня рассчитана на весь урок.

Этап актуализации знаний учащихся проводится с учащимися, которым в дальнейшем будут предложены задачи I или II уровня, при этом при выполнении самостоятельной работы в целях экономии времени к задачам 1–3 необходимо начертить рисунок и краткое решение (можно только ответ), к задачам 4, 5 – полное решение. В зависимости от уровня подготовленности класса, количество обязательных задач можно сократить до четырех.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить первый вариант самостоятельной работы следующего уровня; для учащихся, решавших самостоятельную работу III уровня – дополнительные задачи.

Дополнительные задачи

1. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, $AD : BC = 2 : 1$. Точка E – середина стороны BC трапеции. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника AED равна 60 см^2.
2. В трапеции $MPHK$ MK – большее основание. Площади треугольников MHK и KHP равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь трапеции.
3. Рис. 363. *Дано*: ΔABC – равнобедренный, AC – основание, $KT \parallel BC$, $MP \parallel AB$, $EO \parallel AC$.
Доказать: $S_{AEMN} : S_{MOCT} = BP : BK$.

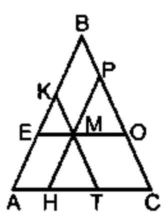


Рис. 363

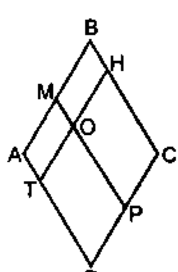


Рис. 364

4. В ромбе $ABCD$ BM – биссектриса треугольника ABD, $\angle BMD = 157°30'$. Найдите площадь ромба, если его высота – 10 см.
5. Рис. 364. *Дано*: $ABCD$ – ромб, $HT \parallel AB$, $MP \parallel BC$.
Доказать: $S_{AOMT} \cdot S_{OHCP} = S_{MBHO} \cdot S_{TOPD}$.

Урок 25
Теорема Пифагора

Цель урока:

- Рассмотреть теорему Пифагора и показать ее применение в ходе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ самостоятельной работы

а) Общий анализ самостоятельной работы.

б) Работа над ошибками по готовым ответам и указаниям (самостоятельно).

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

(Ответы и указания выдаются в распечатанном виде каждому ученику.)

I уровень

I вариант

1. $S = a \cdot h_a = 21 \cdot 15 = 315$ (см^2).
2. $S_\Delta = h_a \cdot a : 2 = 10 \cdot 5 : 2 = 25$ (см^2).
3. $h = \frac{6+10}{2} = 8$ см. $S_{\text{трап.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{6+10}{2} \cdot 8 = 64$ (см^2).
4. Рис. 365. $BK = 3$ см; $S = 8 \cdot 3 = 24$ (см^2).
5. $d_1 + d_2 = 25$; $d_1 = 2k$ (см); $d_2 = 3k$ (см); $k = 5$.

$d_1 = 10$ см; $d_2 = 15$ см. $S = \frac{d_1 d_2}{2} = 10 \cdot 15 : 2 = 75$ (см^2).

II вариант

1. $h_a = a : S = 187 : 17 = 11$ (см).

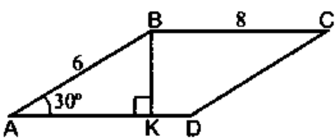


Рис. 365

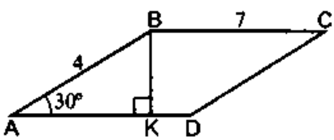


Рис. 366

2. $S_\Delta = h_a \cdot a : 2 = 6 \cdot 18 : 2 = 54$ (см^2).
3. $h = \dfrac{12-4}{2} = 4$ см. $S_{трап} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h = \dfrac{12+4}{2} \cdot 4 = 32$ (см^2).
4. Рис. 366. $BK = 2$ см; $S = 7 \cdot 2 = 14$ (см^2).
5. $d_1 = 3k$ (см); $d_2 = 5k$ (см); $d_2 - d_1 = 8$; $k = 4$.

   $d_1 = 12$ см; $d_2 = 20$ см. $S = \dfrac{d_1 d_2}{2} = 12 \cdot 20 : 2 = 120$ (см^2).

II уровень

I вариант

1. $S = AC \cdot BH : 2 = 36 \cdot 12 : 2 = 216$ (см^2).
2. $S = 4 \cdot 14 = 56$ (см^2), $h_2 = S : 8 = 56 : 8 = 7$ (см).
3. $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$, $a = 0{,}6b$, $S = \dfrac{0{,}6b+b}{2} \cdot h$, $b = 50$ см, $a = 30$ см.
4. Рис. 367.

   Если высоты двух треугольников равны, то площади относятся как основания.

   ΔABC и ΔACM имеют общую высоту, а основания AB и AM равны, поэтому $S_{ACM} = S_{ABC} = 126$ см^2, $S_{MBC} = 25$ см^2.

   ΔMBC и ΔMCK имеют общую высоту, а основание BC в два раза больше основания CK, поэтому $S_{MCK} = S_{MBC} : 2 = 126$ см^2, $S_{MBK} = 378$ (см^2).
5. $\Delta ABM = \Delta KCH$ по гипотенузе и острому углу.

   $S_{MBCH} = S_{MBA} + S_{ABCH} = S_{KCH} + S_{ABCH} = S_{ABCK} = 67$ (см^2).

II вариант

1. $S = BC \cdot AH : 2 = 16 \cdot 4 : 2 = 32$ (см^2).
2. $S_{ABCD} = AB \cdot h_1 = BC \cdot h_2$. $60 = 10 \cdot h_1 = 5 \cdot h_2$.

   $h_1 = 6$ см, $h_2 = 12$ см.
3. $AH = 6$ см, $BH = 6$ см. $BC = AM - 2AH = 8$ см.

   $S = \dfrac{AM + BC}{2} \cdot BH = 84$ (см^2).
4. Рис. 368. $S_{ABC} = 24$ см^2.

   Если высоты двух треугольников равны, то площади относятся как основания.

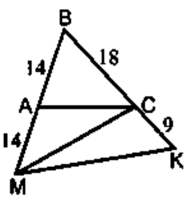


Рис. 367

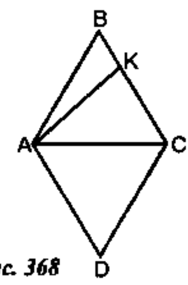


Рис. 368

ΔABK и ΔAKC имеют общую высоту, а основание KC в 3 раза больше основания BK. $S_{ABC} = S_{ABK} + S_{AKC} = 24$, отсюда $S_{ABK} = 6$ см^2.

5. Проведем высоту ABM.
$\Delta ABC = \Delta BAE$, $\Delta MBD = \Delta BME$ по гипотенузе и острому углу.
$S_{ACDM} = S_{ABC} + S_{BAE} + S_{MBD} + S_{BME} = 2 \cdot (S_{BAE} + S_{BME}) = 2 \cdot S_{ABM} =$
$= 46$ см^2.

III уровень

I вариант

1. Рис. 369.
Пусть $BK = x$ см, $AD = 3x$ см.
$S_{ABCD} = BK \cdot AD = x \cdot 3x = 48$, откуда $x = 4$ см, тогда $AD = 12$ см.
$P_{ABCD} = 40$ см, $AD = 12$ см, тогда $AB = 8$ см.
2. $S_{ABCD} = AC \cdot BD : 2 = 5 \cdot 12 : 2 = 30$ см^2, $S_{ACD} = S_{ABCD} : 2 = 15$ см^2.
ΔADM и ΔMDC имеют общую высоту, значит $\dfrac{S_{ADM}}{S_{MDC}} = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{4}{1}$.
Так как $S_{ACD} = S_{ADM} + S_{MDC} = 15$ (см^2), то $S_{ADM} = 12$ (см^2).
3. Рис. 370.
$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = \frac{20 + x + 20 - x}{2} \cdot 12 = 240 \text{ (см}^2\text{)}.$$
4. $S_{ABC} : S_{MPKH} = 1 : 2$.
5. ΔABC и ΔACD имеют равные высоты, поэтому:
$S_{ABC} : S_{ACD} = BC : AD = 3 : 4$.
Так как $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 70$ (см^2), то $S_{ABC} = 30$ (см^2).

II вариант

1. Рис. 371.
Пусть $BK = x$ см, тогда $AD = 2x$ см.
$S_{ABCD} = BK \cdot AD = x \cdot 2x = 50$, откуда $x = 5$ см, тогда $AD = 10$ см.
$P_{ABCD} = 34$ см, $AD = 10$ см, и $AB = 7$ см.
2. $S_{ABC} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24$ (см^2).
Медиана делит ΔABC на два равновеликих треугольника, поэтому $S_{CBH} = S_{ABC} : 2 = 12$ см^2.
В ΔBCH BO – медиана, тогда:
$S_{OBC} = S_{BCH} : 2 = 6$ см^2.
3. Рис. 372. $\angle 1 = \angle 2 = 45°$, $\angle 3 = \angle 4 = 45°$.

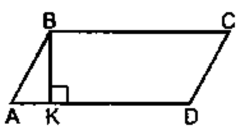


Рис. 369

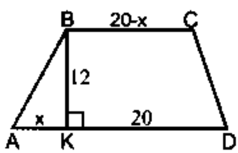


Рис. 370

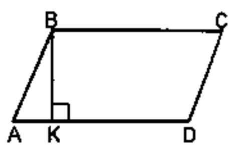


Рис. 371

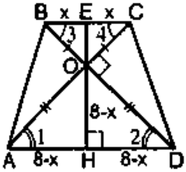


Рис. 372

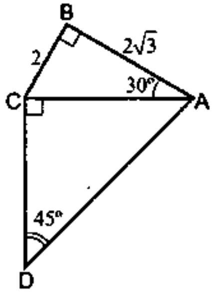


Рис. 373

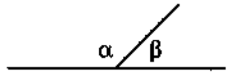


Рис. 374

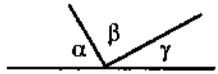


Рис. 375

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2}\cdot EH = \frac{(8-x+8-x)+(x+x)}{2}\cdot 8 = 64\text{ см}^2.$$

4. $S_{ABC} = S_{MPK}$.

5. ΔABC и ΔACD имеют равные высоты, и $S_{ABC} : S_{ACD} = BC : AD = 4 : 5$, тогда т. к. $S_{ACD} = 35$ см^2, то $S_{ABC} = 28$ см^2, $S_{ABCD} = 63$ см^2.

Решение задач по готовым чертежам

(Фронтальная работа с классом с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала.)

1. Рис. 373. *Найти*: S_{ABCD}.
2. Рис. 374. *Найти*: β.
3. Рис. 375. *Найти*: β.
4. Рис. 376. *Доказать*: $MNPK$ – квадрат.

III. Изучение нового материала

Историческая справка. Существует замечательное соотношение между гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника, справедливость которого была доказана древнегреческим философом и математиком Пифагором (VI в. до н.э.). Но изучение вавилонских клинописных таблиц и древних китайских рукописей показало, что это утверждение было известно задолго до Пифагора. Заслуга же Пифагора состояла в том, что он открыл доказательство этой теоремы.

Доказательство теоремы Пифагора

В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

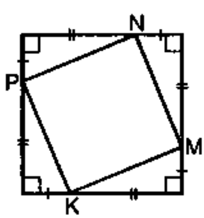


Рис. 376

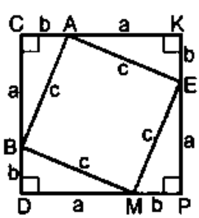


Рис. 377

Доказательство теоремы идет под руководством учителя. На доске и в тетрадях учащихся – рисунок (рис. 377) и доказательство.

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

Доказать: $c^2 = a^2 + b^2$.

Доказательство:

а) Достроим ΔABC до квадрата $CKPD$ со стороной $(a + b)$; $S_{CKPD} = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

б) $\Delta BCA = \Delta AKE = \Delta EPM = \Delta MDB$ по двум катетам. $S_{BCA} = S_{AKE} = S_{EPM} = S_{MDB} = ab/2$.

в) $BAEM$ – квадрат, $S_{BAEM} = c^2$.

г) $S_{CKPD} = S_{BAEM} + S_{BCA} + S_{AKE} + S_{EPM} + S_{MDB} = c^2 + 4 \cdot ab/2 = $
$= c^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$, откуда $c^2 = a^2 + b^2$.

IV. Закрепление изученного

Решить устно № 483 (а, б), 484 (а, б).

Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 45, 46.

Учащиеся работают самостоятельно, по завершении работы один из учащихся читает решение задачи № 45, остальные учащиеся проверяют свое решение, исправляют ошибки.

Таким же образом проверяется задача № 46.

Решить на доске и в тетрадях задачу № 487.

Задача № 487

См. рис. 378.

Дано: ΔABC – равнобедренный, $AB = BC = 17$ см, $AC = 16$ см, BD – высота.

Найти: BD.

Решение:

а) В равнобедренном треугольнике высота, проведенная к основанию, является медианой, поэтому $AD = AC : 2 = 16 : 2 = 8$ см.

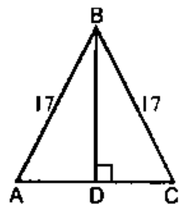


Рис. 378

б) ΔABD – прямоугольный. По теореме Пифагора: $AB^2 = AD^2 + BD^2$, откуда $BD^2 = AB^2 - AD^2 = 17^2 - 8^2 = 225$. Так как $BD > 0$, то $BD = 15$ см.

Наводящие вопросы:

– Сформулируйте свойство высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника?

– Какая связь существует между сторонами прямоугольного треугольника?

– Как запишется теорема Пифагора для треугольника ABD?

Самостоятельно решить задачи № 485, 486 б).

Дополнительные задачи:

1. Большая диагональ прямоугольной трапеции равна 13 см, а большее основание – 12 см. Найдите площадь трапеции, если ее меньшее основание равно 8 см. (*Ответ*: $S_{ABCD} = 50$ см^2.)

2. Основания равнобедренной трапеции равны 10 см и 18 см, а боковая сторона равна 5 см. Найдите площадь трапеции. (*Ответ*: 42 см^2.)

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 54, вопрос 8;

Решить задачи № 483 в), г), 484 в), г), д), 486 в);

Решить задачу № 47 из рабочей тетради.

Дополнительные задачи:

1. В некоторой трапеции диагональ и боковая сторона, выходящие из вершины тупого угла, равны 26 см и $\sqrt{577}$ см соответственно, высота трапеции – 24 см, меньшее основание – 7 см. Найдите площадь трапеции и вторую боковую сторону.
2. В параллелограмме меньшая высота и меньшая сторона равны 9 см и $\sqrt{82}$ см соответственно. Большая диагональ 15 см. Найдите площадь параллелограмма.

Урок 26
Теорема, обратная теореме Пифагора

Цели урока:

- Рассмотреть теорему, обратную теореме Пифагора, и показать ее применение в процессе решения задач.
- Закрепить теорему Пифагора и совершенствовать навыки решения задач на ее применение.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Сформулировать и доказать теорему Пифагора. (Подготовиться у доски одному из учащихся, затем, после решения задач по готовым чертежам заслушать его ответ всем классом.)

Решение задач по готовым чертежам (устно)

1. Рис. 379. *Найти*: *AB*.
2. Рис. 380. *Найти*: *BC*.
3. Рис. 381. *Найти*: *AC*.
4. Рис. 382. *ABCD* ромб.
   Найти: *BC*.

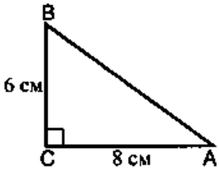


Рис. 379

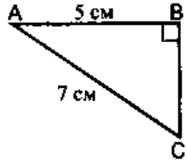


Рис. 380

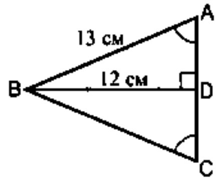


Рис. 381

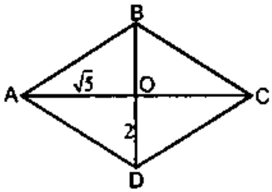


Рис. 382

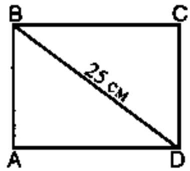


Рис. 383

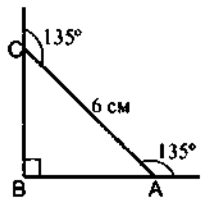


Рис. 384

5. Рис. 383. $ABCD$ – прямоугольник. $AB : AD = 3 : 4$.
Найти: AD.

6. Рис. 384. *Найти*: AB.

7. Решить задачу № 48 из рабочей тетради.

Ответы к задачам:

1. $AB = 10$ см.
2. $BC = 2\sqrt{6}$ см.
3. $AC = 10$ см.
4. $BC = 3$.
5. $AD = 4$ см.
6. $AB = 3\sqrt{2}$ см.
7. $AC = 24$ см; $S_{ABCD} = 120$ см^2.

Фронтальная работа с классом (устно)

Сформулировать утверждения, обратные данным и выяснить, верны ли они:

– Сумма смежных углов равна 180°.
– Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.
– Вертикальные углы равны.
– В параллелограмме противолежащие стороны равны.
– В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

В последнем случае учащиеся смогут сформулировать утверждение обратное данному, а доказательство его справедливости можно провести с помощью учителя.

III. Изучение нового материала

Дано: ΔABC, $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Выяснить, является ли ΔABC прямоугольным?

(Учитель решает у доски, учащиеся – в тетрадях.)

Решение:

а) Рассмотрим $\Delta A_1B_1C_1$ такой, что $\angle C = 90°$, $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$. Тогда по теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$.

б) Так как $A_1C_1 = AC$, $B_1C_1 = BC$, то:
$A_1C_1^2 + B_1C_1^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2$, следовательно, $AB^2 = A_1B_1^2$ и $AB = A_1B_1$.

в) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ по трем сторонам, откуда $\angle C = \angle C_1 = 90°$, т.е. ΔABC – прямоугольный. Итак, если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник прямоугольный.

– Данное утверждение называют теоремой, обратной теореме Пифагора.

Прямоугольные треугольники, длины сторон которых выражаются целыми числами, называются ***пифагоровыми треугольниками.***

Например, треугольник со сторонами 26, 24 и 10.

– Приведите примеры пифагоровых треугольников. (*10, 8 и 6; 13, 12 и 5; 5, 4 и 3; 15, 12 и 9 и другие.*)

– Являются ли пифагоровыми треугольниками треугольники:
а) с гипотенузой 25 и катетом 15;
б) с катетами 5 и 4?

Треугольник со сторонами 3, 4, 5 был известен еще древним египтянам. Египтяне использовали их для построения прямых углов. Делали они это так: на веревке делали метки, делящие ее на 12 равных частей, связывали концы веревки и растягивали на земле с помощью кольев в виде треугольника со сторонами 3, 4 и 5. Угол, лежащий против стороны, равной 5, оказывался прямым. Этот треугольник получил название *египетского треугольника* и по сей день именно так его и называют.

IV. Закрепление изученного

Решить устно № 498 а), б), в).

Решить задачу № 499 а) на доске и в тетрадях учащихся. Один из учащихся по указанию учителя выходит к доске, остальные работают в тетрадях.

Задача № 499 а)

$25^2 = 24^2 + 7^2$, значит, треугольник прямоугольный и его площадь равна половине произведения его катетов, т. е. $S = 24 \cdot 7 : 2 = 84$ см^2.

Меньшая высота проведена к большей стороне, а в прямоугольном треугольнике большей стороной является гипотенуза, значит, $S = h_C \cdot c : 2$, где c – гипотенуза, h_C – высота, проведенная к гипотенузе, тогда $h_C = \dfrac{2S}{c} = \dfrac{2 \cdot 84}{25} = 6{,}72$ (см).

Ответ: 6,72 см.

Наводящие вопросы:

- Как проверить, является ли треугольник прямоугольным?
- К какой из сторон будет проведена меньшая высота треугольника?
- Какой способ вычисления высоты треугольника часто используют в геометрии?
- Используя формулу для вычисления площади треугольника, найдите нужную высоту.

Решить самостоятельно задачи:

1. Определите углы треугольника со сторонами 1, 1, $\sqrt{2}$.

(*Ответ*: 45°, 45°, 90°.)

2. В треугольнике ABC $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$. На стороне AC отмечена точка M так, что $AM = 1$, $BM = 1$. Найдите AC.

(*Ответ*: $1 + \sqrt{3}$.)

3. В треугольнике MPK $PK = 2$. На стороне MK отмечена точка A так, что $MA = AP = \sqrt{3}$, $AK = 1$. Найдите $\angle MPK$.

(*Ответ*: 75°.)

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 55; вопросы 9, 10.

Решить задачи № 498 (г, д, е), № 499 (б), 488 и задачу № 49 из рабочей тетради.

Дополнительные задачи:

1. Боковые стороны трапеции равны 9 см и 12 см, а основания – 30 см и 15 см. Найдите угол, который образуют продолжения боковых сторон трапеции.
2. Диагонали трапеции равны 5 см и 12 см, а основания – 3 см и 10 см. Найдите углы между диагоналями этой трапеции.

Урок 27
Решение задач по теме «Теорема Пифагора»

Цели урока:

- Закрепить знание теоремы Пифагора и теоремы, обратной теореме Пифагора.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы Пифагора и теоремы, обратной теореме Пифагора.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать тему урока.

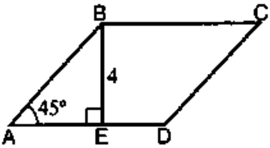


Рис. 385

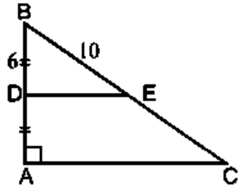


Рис. 386

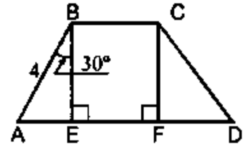


Рис. 387

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

(Фронтальная работа с классом.)

– Сформулировать теорему Пифагора.

– Сформулировать теорему, обратную теореме Пифагора.

Индивидуальные письменные задания:

а) доказать теорему Пифагора (2 ученика);

б) доказать теорему, обратную теореме Пифагора (2 ученика).

Самостоятельное решение задач по готовым чертежам

Решение с последующей проверкой и обсуждением – при необходимости (количество предложенных задач можно изменить).

1. Рис. 385. *ABCD* – параллелограмм. *Найти*: *CD*.

2. Рис. 386. *DE* || *AC*. *Найти*: *AC*.

3. Рис. 387. *ABCD* – трапеция. *Найти*: *CF*.

4. Рис. 388. *Найти*: *BD*.

5. Рис. 389. *ABCD* – квадрат. *Найти*: *AO*.

6. Рис. 390. *Найти*: *DC*; *AC*; *AB*.

7. Рис. 391. *Найти*: *BD*.

8. Рис. 392. *ABCD* – параллелограмм. *Найти*: *AD*.

9. Рис. 393. ΔABC – равносторонний. *Найти*: *AO*, *OE*.

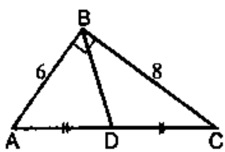


Рис. 388

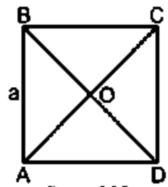


Рис. 389

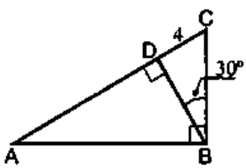


Рис. 390

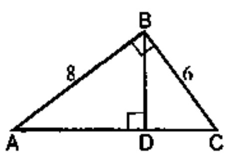


Рис. 391

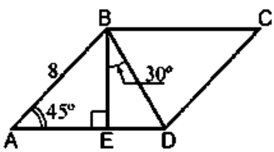


Рис. 392

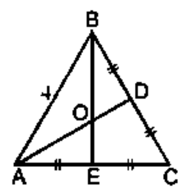


Рис. 393

Ответы к задачам:

1. $CD = 4\sqrt{2}$. **2.** $AC = 16$.

3. $CF = 2\sqrt{3}$. **4.** $BD = 5$.

5. $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **6.** $DC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8\sqrt{3}$; $AB = 16$.

7. 4,8. **8.** $AD = 4\sqrt{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. $OE = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $AO = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

III. Решение задач

Решить самостоятельно задачи № 492, 495 а), записав краткое решение, а затем в классе обсудить решение задач.

Задача № 492

Краткое решение (рис. 394):

Из ΔABD $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

ΔABC – равнобедренный $\Rightarrow$ CH = AK.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BD = \dfrac{1}{2} CH \cdot AB \Rightarrow CH = \dfrac{AC \cdot BD}{AB} = \dfrac{12 \cdot 8}{10} = 9{,}6$ (см).

Ответ: 18; 9,6; 9,6 см.

Вопросы для обсуждения:

– Какую высоту проще всего найти в треугольнике ABC? Почему?
– Какой способ нахождения высоты необходимо использовать для того, чтобы найти высоту, проведенную к боковой стороне данного равнобедренного треугольника?
– Что вы можете сказать о высотах равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам?

Задача № 495 (а)

Краткое решение (рис. 395):

$DK = CE$ ($\Delta ADK = \Delta CBE$ по гипотенузе и острому углу),

$ABEK$ – прямоугольник, тогда $KE = 10$ см, $DK = \dfrac{20-10}{10} = 5$ (см).

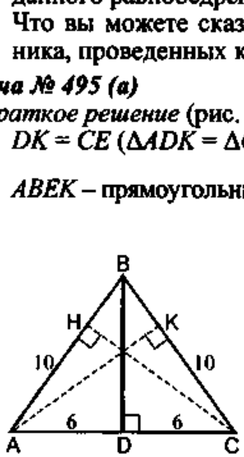


Рис. 394

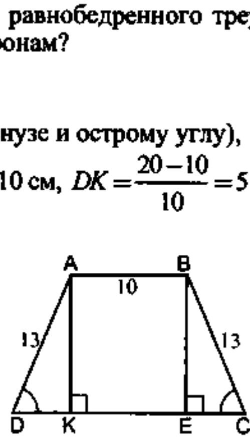


Рис. 395

ΔADK – прямоугольный $\Rightarrow$ АК $= \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} AK \cdot (AB + CD) = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot (10 + 20) = 180$ (см^2).

Ответ: 180 см^2.

Вопросы для обсуждения:

– Какой формулой вы пользовались для вычисления площади трапеции?

– Расскажите, как вы нашли высоту трапеции?

IV. Самостоятельная работа (проверочного характера)

I уровень

I вариант

1. Диагонали ромба равны 14 и 48 см. Найдите сторону ромба.
2. В треугольнике два угла равны 45° и 90°, а большая сторона – 20 см. Найдите две другие стороны треугольника.

II вариант

1. Стороны прямоугольника равны 8 и 12 см. Найдите его диагональ.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 6$ см. Найдите стороны треугольника.

II уровень

I вариант

1. В прямоугольной трапеции основания равны 5 и 17 см, а большая боковая сторона – 13 см. Найдите площадь трапеции.
2. В треугольнике две стороны равны 10 и 12 см, а угол между ними 45°. Найдите площадь треугольника.

II вариант

1. В прямоугольной трапеции боковые стороны равны 15 и 9 см, а большее основание – 20 см. Найдите площадь трапеции.
2. В треугольнике две стороны равны 12 и 8 см, а угол между ними 60°. Найдите площадь треугольника.

III уровень

I вариант

1. В параллелограмме $ABCD$ $BD = 2\sqrt{41}$ см, $AC = 26$ см, $AD = 16$ см. Через точку O – точку пересечения диагоналей параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная стороне BC. Найдите отрезки, на которые эта прямая разделила сторону AD.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. Высота AK делит сторону BC на отрезки $BK = 24$ см и $KC = 1$ см. Найдите площадь треугольника и сторону AC.

II вариант

1. Две окружности радиусами 13 и 15 см пересекаются. Расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно 14 см. Общая хорда этих окружностей AB пересекает отрезок O_1O_2 в точке K. Найдите O_1K и KO_2 (O_1 – центр окружности радиусом 13 см).
2. В треугольнике ABC $AB = AC$. Высота BM равна 9 см и делит сторону AC на два отрезка так, что $AM = 12$ см. Найдите площадь и периметр треугольника.

Дополнительные задачи

I вариант

1. На продолжении диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка M, которая соединена с вершиной B. Докажите, что $AM \cdot CM = MB^2 - AB^2$.
2. В ΔABC BD – высота, проведенная из вершины прямого угла. Используя теорему Пифагора, докажите, что $BD^2 = AD \cdot DC$.

II вариант

1. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна x. Произвольная точка M на катете BC соединена с вершиной A, а точка H на катете AC соединена с вершиной B. Найдите длину отрезка MH, если $AM^2 + BH^2 = y^2$.
2. В треугольнике ABC BD – высота, проведенная их вершины прямого угла. Используя формулу площади треугольника и теорему Пифагора, докажите, что $AB^2 = AD \cdot AC$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи № 489 а), в), 491 а), 493 и задачу № 50 из рабочей тетради.

Дополнительная задача

В равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями боковая сторона равна 26 см. Высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки, меньший из которых равен 10 см. Найдите площадь трапеции.

Урок 28
Решение задач

Цели урока:

- Закрепить знания, умения и навыки учащихся по теме «Площадь».
- Совершенствовать навыки решения задач.
- Подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Анализ самостоятельной работы

1. Общий анализ самостоятельной работы (сообщение итогов работы, анализ распространенных ошибок).

2. Работа над ошибками (учащиеся работают самостоятельно с использованием готовых ответов и указаний к задачам самостоятельной работы, в это время учитель индивидуально проверяет решение домашних задач).

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. Рис. 396.
   Так как $AC = 14$ см, $BD = 48$ см, то $AO = 7$ см, $BO = 24$ см.
   $AB^2 = AO^2 + BO^2 = 7^2 + 24^2 = 625$. $AB = 25$ см.

Ответ: $AB = 25$ см.

2. Рис. 397. ΔABC – прямоугольный, равнобедренный
   $x^2 + x^2 = 20^2$; $x = 10\sqrt{2}$.

Ответ: $10\sqrt{2}$ см, $10\sqrt{2}$.

II вариант

1. Рис. 398.
   $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$. $AC = 4\sqrt{13}$ см.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

2. Рис. 399. Так как $\angle B = 30°$, $\angle A = 90°$, то $AC = BC : 2$, т. е. $AC = x$ см, $BC = 2x$ см.
   $x^2 + 6^2 = (2x)^2$; $x = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$.

II уровень

I вариант

1. Рис. 400. Проведем $CE \perp AD$. $CD^2 = CE^2 + DE^2$; $CE = 5$ см.
   $S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 55$ (см^2).

Ответ: 55 см^2.

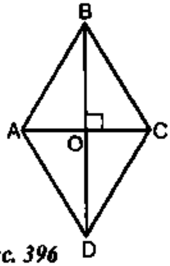


Рис. 396

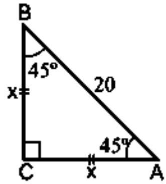


Рис. 397

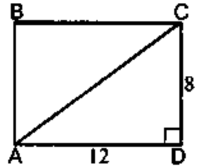


Рис. 398

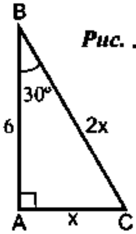


Рис. 399

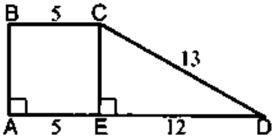


Рис. 400

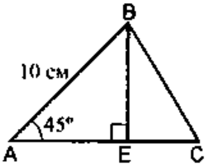


Рис. 401

2. Рис. 401.

Проведем $BE \perp AC$, тогда в ΔABE $AE = BE = x$ см, $\angle E = 90°$, $AB^2 = x^2 + x^2$, откуда $x = 5\sqrt{2}$ (см^2).

$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 30\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: $30\sqrt{2}$ см^2.

II вариант

1. Рис. 402.

Проведем $CE \perp AD$.

$DE^2 = CD^2 - CE^2 = 144$, $DE = 12$ см, тогда $BC = AE = 8$ см.

$S_{ABCD} = (AD + BC) \cdot CE : 2 = 126$ (см^2).

Ответ: 126 см^2.

2. Рис. 403.

Проведем $BE \perp AC$, тогда в ΔABE $AE = 6$ см,

$BE^2 = AB^2 - AE^2 = 108$, $BE = 6\sqrt{3}$ см.

$S_{ABC} = AC \cdot BE : 2 = 24\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $24\sqrt{3}$ см^2.

III уровень

I вариант

1. Рис. 404.

$BO = OD = BD : 2 = \sqrt{41}$ см. $AO = OC = AC : 2 = 13$ см.

Если $KD = x$ см, то $AK = 16 - x$ (см).

$OK^2 = OD^2 - KD^2 = AO^2 - AK^2$.

$41 - x^2 = 13^2 - (16 - x)^2$; $x = 4$.

$KD = 4$ см, $AK = 12$ см.

Ответ: 4 см, 12 см.

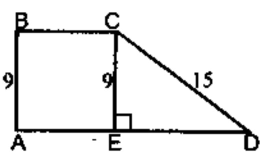


Рис. 402

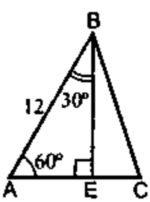


Рис. 403

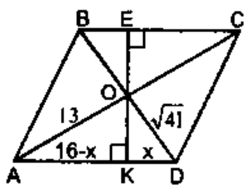


Рис. 404

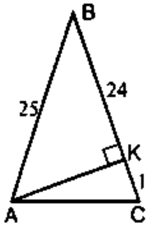


Рис. 405

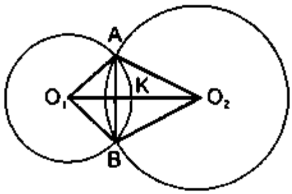


Рис. 406

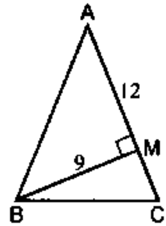


Рис. 407

2. Рис. 405.
$AB = BC = BK + KC = 25$ см. $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 49$, $AK = 7$ см.
$AC^2 = AK^2 + KC^2 = 50$, $AC = 5\sqrt{2}$ см.
$S_{ABC} = AK \cdot BC : 2 = 7 \cdot 25 : 2 = 87{,}5$ (см^2).

Ответ: $AC = 5\sqrt{2}$ см, $S = 87{,}5$ см^2.

II вариант

1. Рис. 406.
$\Delta O_1AO_2 = \Delta O_1BO_2$, тогда $\angle AO_1K = \angle BO_1K$, т. е. O_1K – биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного $\angle AO_1B$, следовательно, $O_1K \perp AB$.
Пусть $O_1K = x$ см, $O_2K = 14 - x$ (см), тогда:
$AK^2 = AO_1{}^2 - KO_1{}^2 = OA_2{}^2 - KO_2{}^2$.
$13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$; $x = 5$.

Ответ: $O_1K = 5$ см, $KO_2 = 9$ см.

2. Рис. 407.
$AB^2 = BM^2 + AM^2 = 225$, $AB = 15$ см.
$AC = AB = 15$ см, $CM = 3$ см.
$BC^2 = BM^2 + MC^2 = 90$, $BC = 3\sqrt{10}$ (см).
$P_{ABC} = 15 + 15 + 3\sqrt{10} = 30 + 3\sqrt{10}$ (см).
$S_{ABC} = BM \cdot AC : 2 = 67{,}5$ (см^2).

Ответ: $P = 30 + 3\sqrt{10}$ (см), $S = 67{,}5$ см^2.

Ответы и указания к дополнительным задачам

I вариант

1. Пусть O – точка пересечения диагонали ромба.
Тогда в ΔMBO $MB^2 = BO^2 + OM^2$, а в ΔABO $AB^2 = BO^2 + AO^2$.
Значит, $MB^2 - AB^2 = OM^2 - AO^2 = (OM - AO)(OM + AO)$.
Так как $AO = OC$, $MC = OM - OC$, $OM + AO = AM$,
тогда $MB^2 - AB^2 = MC \cdot AM$.

2. Из ΔABC $AC^2 = BC^2 + AB^2$. Из ΔBDC $BC^2 = BD^2 + DC^2$.
Из ΔADB $AB^2 = BD^2 + AD^2$.
Учитывая, что $AC = AD + DC$, получаем $(AD + DC)^2 =$
$= 2BD^2 + DC^2 + AD^2$, откуда $BD^2 = AD \cdot DC$.

II вариант

1. Из ΔACM $AM^2 = AC^2 + CM^2$ (1).
Из ΔBCH $BH^2 = BC^2 + HC^2$ (2).
Складывая равенства (1) и (2), получаем:
$AM^2 + BH^2 = AC^2 + BC^2 + CM^2 + HC^2$.
Из ΔABC $AC^2 + BC^2 = x^2$, из Δ MHC получаем $CM^2 + HC^2 = MH^2$.
Значит, $y^2 = x^2 + MH^2$, $MH = \sqrt{y^2 - x^2}$.
2. Используя формулы $S_{ABC} = AB \cdot BC : 2 = BD : 2$ получаем:
$AB \cdot BC = BD \cdot AC$, тогда $AB^2 \cdot BC^2 = BD^2 \cdot AC^2$.
Из ΔABC $BC^2 = AC^2 - AB^2$. Из ΔABD $BD^2 = AB^2 - AD^2$.
Значит, $AB^2 \cdot (AC^2 - AB^2) = (AB^2 - AD^2) \cdot AC^2$, или
$AB^4 = AD^2 \cdot AC^2$, откуда $AB^2 = AD \cdot AC$.

III. Проверка домашнего задания

Решение дополнительной задачи:

а) В прямоугольном ΔABH по теореме Пифагора:
$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 26^2 - 10^2 = 576$, т. е. $BH = 24$ см.

б) $\Delta ABD = \Delta DCA$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD – общая сторона, $\angle BAD = \angle CDA$ как углы при основании равнобедренной трапеции), тогда $\angle BDA = \angle CAD$ и ΔAOD – равнобедренный и прямоугольный, тогда $\angle OAE = 45°$.

в) Проведем точку $KE \perp AD$ через точку O, тогда ΔAOE – прямоугольный, в нем $\angle OAE = 45°$, тогда $\angle AOE = 45°$ и $AE = OE$.

г) Таким же образом можно доказать, что $OK = BK$.

д) Так как $AE = OE$ и $OK = BK$, то $KE = AE + BK = BH = 24$ см.

е) OK и OE – высоты и медианы равнобедренных ΔBOC и ΔAOD, тогда $BK = KC$ и $AE = DE$, $BC + AD = 2KE = 48$ см.

ж) $S_{ABCD} = (AD + BC) : 2 \cdot BH = 48 \cdot 24 : 2 = 576$ (см^2).

Ответ: 576 см^2.

IV. Решение задач

Решить на доске и в тетрадях задачу № 496.

Один из учащихся решает задачу у доски, остальные – в тетрадях.

Задача № 496 (рис. 408)

Пусть $DB = x$ см, тогда $AD = AB - DB = 3 - x$ и $BC = (3 - x)$ см. В прямоугольном ΔCDB $CB^2 = DB^2 + CD^2$, т. е. $BD = 1$ см, $AD = 3 - x = 2$.
В прямоугольном ΔACD $AC^2 = AD^2 + CD^2 = 2^2 + \sqrt{3}^2 = 7$, т.е. $AC = \sqrt{7}$ см.

Рис. 408

Ответ: $\sqrt{7}$ см.

Наводящие вопросы:

– Назовите теорему, с помощью которой мы сможем найти длину стороны AC.

– Известны ли длины катетов прямоугольного треугольника ADC?

– Обозначим длину отрезка DB за x. Чему равна длина отрезка AD?
– Каким соотношением связаны между собой стороны треугольника DBC?

Решить самостоятельно задачи:
I уровень – № 490 б), 492 б), 495 в).
II уровень – № 495 в), 522, 523.

V. Подведение итогов урока
Оценить работу учащихся.

Домашнее задание
Решить задачи № 495 б), 494, 490 а), 524 (устно).

Урок 29
Решение задач

Цели урока:
- Совершенствовать навыки решения задач по теме «Площадь».
- Ознакомить учащихся с формулой Герона и показать ее применение в процессе решения задач.
- Подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент
Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания
Проверить задачу № 524 (доказательство формулы Герона).

На доске подготовить рисунок (рис. 409), записать на доске и в тетрадях план доказательства формулы Герона:

План доказательства:

а) В ΔBCH $h^2 = a^2 - x^2$. В ΔACH $h^2 = b^2 - y^2$.

б) $a^2 - x^2 = b^2 - y^2$; $y^2 - x^2 = b^2 - a^2$;
$(y - x)(y + x) = b^2 - a^2$.
$y + x = c$ (1), тогда $y - x = (b^2 - a^2) : c$ (2).

в) (1) + (2) : $2y = c + (b^2 - a^2) : c = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{c}, y = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$.

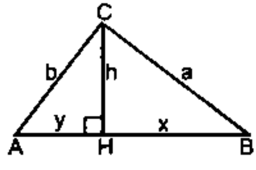


Рис. 409

г) $h^2 = b^2 - y^2 = (b - y)(b + y) = (b - \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{c})$.

$(b + \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{c}) = \dfrac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2c} \cdot \dfrac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{2c} =$

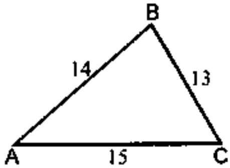


Рис. 410

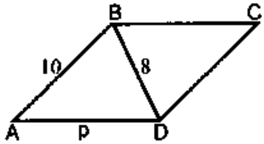


Рис. 411

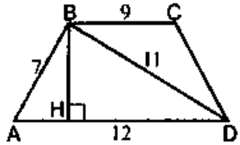


Рис. 412

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2c} \cdot \frac{(b+c)^2-a^2}{2c} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)\cdot(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2} =$$

$$= \frac{((a+b+c)-2b)((a+b+c)-2c)\cdot((a+b+c)-2a)\cdot(a+b+c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)\cdot 2p}{4c^2} = \frac{16(p-a)(p-b)(p-c)\cdot p}{4c^2} =$$

$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2},$$

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = P:2 = (a+b+c):2.$$

д) $S_\Delta = c \cdot h : 2 = c : 2 \cdot \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Закрепление формулы Герона

Решить задачи (устно, фронтальная работа с классом):

1. Рис. 410. *Найти*: S_{ABC}.
2. Рис. 411. *Найти*: S_{ABCD}.
3. Рис. 412. *Найти*: S_{ABCD}.

III. Решение задач

На доске и в тетрадях решить задачи № 504, 517.

К доске вызываются два ученика, один из них решает самостоятельно задачу № 504, другой – № 517. На местах учащиеся решают обе задачи, а затем проверяют решение с доски, ищут ошибки в своем решении и в решении на доске, высказывают свое мнение о правильности решения задач.

Задача № 504

Решение (рис. 413):

Проведем высоту параллелограмма CE. Так как $OK \perp AD$ и $CE \perp AD$, O – середина AC, то по теореме Фалеса $AK = KE = 33$ см, тогда $DE = KE - KD = 21$ см. В ΔDCE $\angle E = 90°$, $DC = 29$ см, $DE = 21$ см, тогда по теореме Пифагора $CE^2 = CD^2 - DE^2 =$ $= 841 - 441 = 400 \Rightarrow CE = 20$ см.

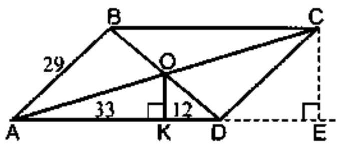


Рис. 413

$S_{ABCD} = AD \cdot CE = (33 + 12) \cdot 20 = 900$ (см^2).

Ответ: 900 см^2.

Наводящие вопросы:

– Проведите высоту параллелограмма CE. Что вы можете сказать об отрезке KE? Чему он равен?
– Для чего мы нашли длину отрезка KE?
– Какая формула применяется для вычисления площади параллелограмма?

Задача № 517

I способ:

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$.

ΔABC и ΔACD – прямоугольные по теореме, обратной теореме Пифагора, так как $5^2 + 12^2 = 13^2$, $9^2 + 12^2 = 15^2$. Площадь прямоугольного треугольника вычисляется по формуле $S = \dfrac{ab}{2}$, где a и b – катеты треугольника.

$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ (см^2), $S_{ACD} = \dfrac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$ (см^2),

$S_{ABCD} = 30 + 54 = 84$ (см^2).

II способ:

По формуле Герона $S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; a, b, c – стороны треугольника.

$P_{ABC} = \dfrac{5+12+13}{2} = 15$ (см), $P_{ACD} = \dfrac{9+12+15}{2} = 18$ (см),

$S_{ABC} = \sqrt{15 \cdot (15-5)(15-12)(15-13)} = \sqrt{15 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2} = 30$ (см^2),

$S_{ACD} = \sqrt{18 \cdot (18-9)(18-12)(18-15)} = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = 54$ (см^2).

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 30 + 54 = 84$ (см^2).

Ответ: 84 см^2.

Наводящие вопросы:

– Существует ли формула, позволяющая вычислить площадь произвольного четырехугольника?
– На какие две фигуры разбит этот четырехугольник отрезком AC?
– Что вы можете сказать об этих треугольниках? Как можно вычислить их площади?
– Существует ли другой способ вычисления площадей треугольников?

Самостоятельное решение задач № 502, 514, 516, 525.

(В тетрадях начертить рисунок и записать краткое решение. Учитель в это время работает индивидуально с менее подготовленными учащимися.)

Задача № 502

Краткое решение:

$P = 42$ см $= (a + b) \cdot 2 \Rightarrow a + b = 21$, $b = 21 - a$ (a и b – стороны параллелограмма, h_1 и h_2 – его высоты).

$$S = a \cdot h_1 = b \cdot h_2 \Rightarrow a \cdot 5 = (21 - a) \cdot 4 \Rightarrow a = 9\frac{1}{3} \text{ (см)};$$

$$S = 9\frac{1}{3} \cdot 5 = 46\frac{2}{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $46\frac{2}{3}$ см^2.

Задача № 514

Краткое решение (рис. 414):

Пусть $AC = 4{,}5$ дм $= 45$ см.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{540}{\frac{1}{2} \cdot 45} = 24 \text{ (см)}.$$

ΔBOC – прямоугольный, $S_{BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC = \frac{1}{2} BC \cdot OK \Rightarrow$

$\Rightarrow OK = \frac{BO \cdot OC}{BC}$, $BO = \frac{1}{2} BD = 12$ (см), $OC = \frac{1}{2} AC = 22{,}5$ (см),

По теореме Пифагора: $BC^2 = BO^2 + OC^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \sqrt{12^2 + 22{,}5^2} = 25{,}5$ (см) $\Rightarrow OK = \frac{12 \cdot 22{,}5}{25{,}5} = 10\frac{10}{17}$ (см).

Ответ: $10\frac{10}{17}$ см.

Задача № 516

Краткое решение (рис. 415):

Проведем $BK \perp AC$.

По теореме Фалеса: т. к. $BM = MC$, $BK \parallel MN$, то $KN = NC = 15$ см.

По теореме Пифагора: $BK^2 = BC^2 + KC^2 = 34^2 - 30^2 = 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow BK = 16$ см.

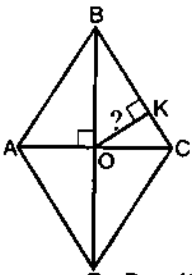


Рис. 414

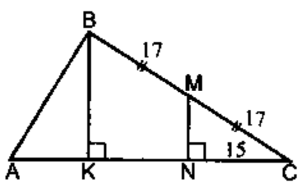


Рис. 415

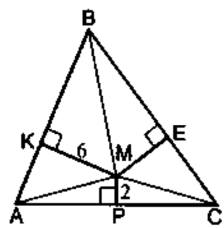


Рис. 416

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2}(25 + 15) \cdot 16 = 320\ (\text{см}^2).$$

Ответ: 320 см^2.

Задача № 525

Краткое решение (рис. 416):

$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{BCM} + S_{ACM}$.

$$S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot MK = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 6 = 39\ (\text{см}^2),$$

$$S_{ACM} = \frac{1}{2} AC \cdot MP = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2 = 15\ (\text{см}^2).$$

По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)}$, где

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21\ (\text{см}) \Rightarrow$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-15)(21-14)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 7} = 84\ (\text{см}^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{BCM} = 84 - 39 - 15 = 30\ (\text{см}^2),\ S_{BCM} = \frac{1}{2} BC \cdot ME \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ME = \frac{2 \cdot S_{BCM}}{BC} = \frac{2 \cdot 30}{14} = 4\frac{2}{7}\ (\text{см}).$$

Ответ: $4\frac{2}{7}$ см.

IV. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Решить задачи № 490 в), 497, 503, 518.

Урок 30
Контрольная работа № 2 по теме «Площадь»

Цель урока:

- Проверить уровень теоретических знаний, умение решать задачи и навыки учащихся по теме «Площадь».

Ход урока

I. Организационный момент

II. Выполнение контрольной работы

Текст контрольной работы см. в Приложении.

III. Подведение итогов урока

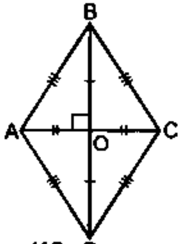


Рис. 417

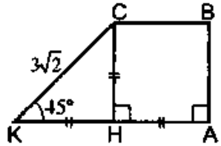


Рис. 418

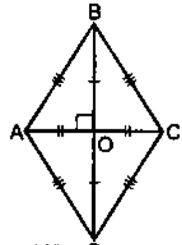


Рис. 419

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми не справились во время контрольной работы. (В конце урока для учащихся вывесить в кабинете краткое решение задач контрольной работы. Условия задач в распечатанном виде выдаются на дом.)

Краткое решение задач контрольной работы:

I уровень

I вариант

1. $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$. $a = 5$ см, $h_a = 5 \cdot 2 = 10$ см, $S = 5 : 2 \cdot 10 = 25$ (см^2).

Ответ: 25 см^2.

2. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $c = 10$ см.

$S = \frac{ab}{2} = 6 \cdot 8 : 2 = 24$ (см^2).

Ответ: 10 см, 24 см^2.

3. Рис. 417. ΔAOB – прямоугольный.

$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 4^2 + 5^2 = 41$, $AB = \sqrt{41}$ см.

$P_{ABCD} = 4\sqrt{41}$ см. $S_{ABCD} = AC \cdot BD : 2 = 8 \cdot 10 : 2 = 40$ (см^2)

Ответ: $P = 4\sqrt{41}$ см, $S = 40$ см^2.

4*. Рис. 418.

ΔKCH – прямоугольный, равнобедренный, тогда $KH = CH$.

По теореме Пифагора $CK^2 = KH^2 + CH^2$, $(3\sqrt{2})^2 = KH^2 + KH^2$, $KH = 3$ см, $CH = 3$ см. Так как CH делит AK пополам, то $AH = 3$ см, $AK = 6$ см. $ABCH$ – прямоугольник, $BC = AH = 3$ см.

$S_{ABCK} = CH : 2 \cdot (BC + AK) = 3 : 2 \cdot (3 + 6) = 13{,}5$ (см^2).

Ответ: $S_{ABCK} = 13{,}5$ см^2.

II вариант

1. $S = \frac{1}{2}a \cdot h_a$. $a = 12$ см, $h_a = 12 : 3 = 4$ (см), $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24$ (см^2).

Ответ: 24 см^2.

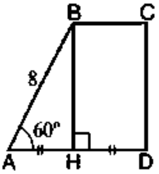


Рис. 420

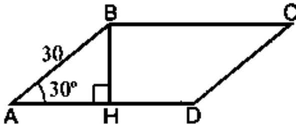


Рис. 421

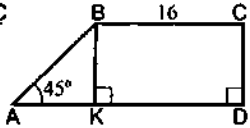


Рис. 422

2. По теореме Пифагора $a^2 = c^2 - b^2 = 13^2 - 12^2 = 25$, $a = 5$ см.

$S = \dfrac{ab}{2} = 5 \cdot 12 : 2 = 30$ (см^2). *Ответ*: 5 см, 30 см^2.

3. Рис. 419. ΔAOB – прямоугольный.

$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 5^2 + 6^2 = 61$. $AB = \sqrt{61}$ см.

$P_{ABCD} = 4\sqrt{61}$ см. $S_{ABCD} = AC \cdot BD : 2 = 10 \cdot 12 : 2 = 60$ (см^2)

Ответ: $P = 4\sqrt{61}$ см, $S = 60$ см^2.

4*. Рис. 420. ΔABH – прямоугольный, в нем $\angle A = 60°$, тогда $\angle ABH = 30°$, $AH = \dfrac{1}{2} \cdot AB = 4$ см.

По теореме Пифагора $BH^2 = AB^2 - AM^2 = 82 - 42 = 48$, $BH = 4\sqrt{3}$ см. Так как BH делит AD пополам, то $DH = 4$ см, $AD = 8$ см. $HBCD$ – прямоугольник, $BC = HD = 4$ см.

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot BH \cdot (CD + AD) = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot (4 + 8) = 24\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $S_{ABCD} = 24\sqrt{3}$ см^2.

II уровень

I вариант

1. Рис. 421. ΔABH – прямоугольный, в нем $\angle A = 30°$,

$BH = \dfrac{1}{2} \cdot AB = 15$ см. $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 52 \cdot 15 = 780$ (см^2).

Ответ: 780 см^2.

2. Рис. 422. Проведем высоту BK, тогда $KBCD$ – прямоугольник, $KD = BC = 16$ см, $AK = AD - KD = 24 - 16 = 8$ (см).

ΔABK – прямоугольный равнобедренный ($\angle K = 90°$, $\angle A = 45°$, $\angle ABK = 90° - \angle A = 45°$), тогда $AK = BK = 8$ см.

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2} \cdot BK \cdot (BC + AD) = \dfrac{1}{2} \cdot 8 \cdot (16 + 24) = 160$ (см^2).

Ответ: $S_{ABCD} = 160$ см^2.

3. Рис. 423.

ΔABK и ΔCBK имеют одну и ту же высоту, значит $S_{ABK} : S_{CBK} = AK : CK = 6 : 9$.

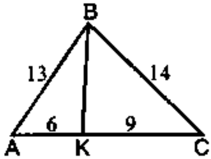


Рис. 423

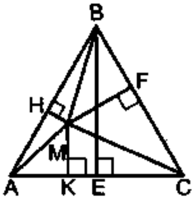


Рис. 424

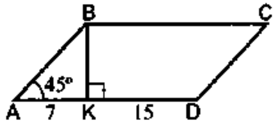


Рис. 425

$S_{ABK} + S_{CBK} = S_{ABC}$, значит,

$S_{ABK} = \dfrac{6}{15} S_{ABC} = \dfrac{2}{5} S_{ABC}$, $S_{CBK} = \dfrac{9}{15} S_{ABC} = \dfrac{3}{5} S_{ABC}$.

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ по формуле Герона, где a, b, c – стороны ΔABC, p – его полупериметр.

$p = \dfrac{1}{2} \cdot (13 + 14 + 15) = 21$ см.

$S_{ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} =$
$= 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 84$ (см^2).

$S_{ABK} = 84 \cdot 2 : 5 = 33{,}6$ (см^2). $S_{CBK} = 84 \cdot 3 : 5 = 50{,}4$ (см^2).

Ответ: $S_{ABK} = 33{,}6$ см^2, $S_{CBK} = 50{,}4$ см^2.

4*. Рис. 424. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BE$ (1).

Так как ΔABC – равносторонний, то $AB = AC$, тогда

$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} + S_{BCM} =$

$= \dfrac{1}{2} AB \cdot HM + \dfrac{1}{2} AC \cdot MK + \dfrac{1}{2} BC \cdot MF =$

$= \dfrac{1}{2} AC \cdot (HM + MK + MF)$ (2).

Из равенств (1) и (2) следует, что $HM + MK + MF = BE = 6$ см.

Ответ: 6 см.

II вариант

1. Рис. 425.

ΔABK – прямоугольный; в нем $\angle A = 45°$, тогда $\angle ABK = 90° - 45° = 45°$, значит ΔABK – равнобедренный, $AK = BK = 7$ см.

$S_{ABCD} = AD \cdot BK = (AK + KD) \cdot BK = (7 + 15) \cdot 7 = 154$ (см^2).

Ответ: 154 см^2.

2. Рис. 426.

Проведем высоту CK, тогда ΔCDK – прямоугольный, в нем $\angle D = 30°$, $CK = \dfrac{1}{2} \cdot CD = 5$ (см).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot CK \cdot (AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (27 + 13) = 100 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 100$ см^2.

3. Рис. 427.

ΔKPT и ΔMPT имеют одну и ту же высоту, значит $S_{KPT} : S_{MPT} = KT : MT = 10 : 5 = 2 : 1$.

$S_{KPT} + S_{MPT} = S_{MPK}$, тогда $S_{KPT} = \frac{2}{3} \cdot S_{MPK}$, $S_{MPT} = \frac{1}{3} \cdot S_{MPK}$.

$S_{MPK} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ по формуле Герона, где a, b, c – стороны ΔMPK, p – его полупериметр.

$p = \frac{1}{2} \cdot (9 + 12 + 15) = 18$ см.

$S_{MPK} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 9 \cdot 2 \cdot 3 = 54$ (см^2).

$S_{KPT} = \frac{2}{3} \cdot S_{MPK} = 36$ (см^2). $S_{MPT} = \frac{1}{3} \cdot S_{MPK} = 18$ (см^2).

Ответ: $S_{KPT} = 36$ см^2, $S_{MPT} = 18$ см^2.

4*. Рис. 428.

Пусть $x = AB$ – меньшая сторона треугольника, $y = BC$ – вторая сторона, тогда $0{,}75(x + y) = AC$ – большая сторона. Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы, т. е. так как $\angle ABM = \angle CBM$, то

$$\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{AB \cdot BM}{CB \cdot BM} = \frac{AB}{CB} = \frac{x}{y}, \text{ тогда } S_{ABM} = \frac{x}{y} S_{CBM}.$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 0{,}75 \cdot (x + y) \cdot 4 = 1{,}5 \cdot (x + y).$$

С другой стороны $S_{ABC} = S_{ABM} + S_{CBM} = \frac{x}{y} \cdot S_{CBM} = S_{CBM} \cdot (x : y + 1)$,

тогда $1{,}5 \cdot (x + y) = S_{CBM} \cdot (x : y + 1)$,
откуда $S_{CBM} = 1{,}5(x + y) : (x : y + 1) = 1{,}5y$,

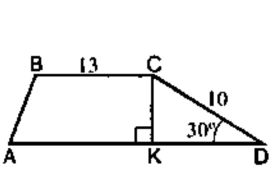


Рис. 426

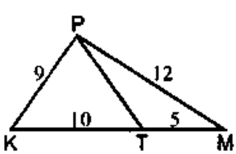


Рис. 427

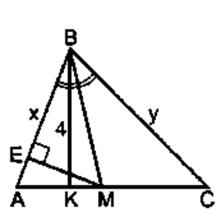


Рис. 428

значит, $S_{ABM} = \dfrac{x}{y} \cdot 1{,}5y = 1{,}5x$.

Но $S_{ABM} = \dfrac{1}{2} AB \cdot ME$, и $ME = 2S_{ABM} : AB = 2 \cdot 1{,}5x : x = 3$ см.

Ответ: 3 см.

III уровень

I вариант

1. Рис. 429.

В ΔDBE $DB^2 = BE^2 + DE^2$ $(13^2 = 12^2 + 5^2)$, по теореме, обратной теореме Пифагора, ΔDBE – прямоугольный, $BE \perp DE$, т. е. BE – высота параллелограмма.

$S_{ABCD} = AD \cdot BE = (AE + ED) \cdot BE = (4 + 5) \cdot 12 = 108$ (см^2).

Ответ: 108 см^2.

2. Рис. 430.

ΔBCE – прямоугольный, по теореме Пифагора:

$BC^2 = BE^2 + CE^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, $BC = 15$ см.

$S_{ABC} = AK \cdot BC : 2 = CE \cdot AB : 2$.

$10 \cdot 15 : 2 = 12 : 2 \cdot AB$, откуда $AB = 12{,}5$ см,

значит, $AE = AB - BE = 12{,}5 - 9 = 3{,}5$ (см).

ΔACE – прямоугольный, по теореме Пифагора:

$AC^2 = AE^2 + CE^2 = 3{,}5^2 + 12^2 = 156{,}25$, откуда $AC = 12{,}5$ см.

Ответ: $AC = 12{,}5$ см.

3. Рис. 431.

ΔABK – прямоугольный, в нем $\angle A = 30°$, $BK = 1$ см,

тогда $AB = 2$ см.

По теореме Пифагора $AK^2 = AB^2 - BK^2 = 4 - 1 = 3$, $AK = \sqrt{3}$ см.

Проведем высоту CE, тогда прямоугольные треугольники ABK и DCE равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$, т. к. $ABCD$ – равнобедренная трапеция), тогда $DE = AK = \sqrt{3}$ см.

$KBCE$ – прямоугольник, поэтому $KE = BC = 2\sqrt{3}$ см,

тогда $KD = KE + DE = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ (см).

ΔBKD – прямоугольный, отсюда:

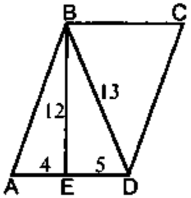


Рис. 429

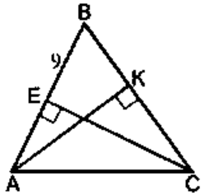


Рис. 430

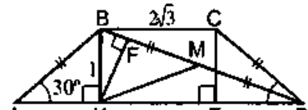


Рис. 431

$S_{BKD} = \frac{1}{2} BK \cdot KD = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см^2).

$S_{BKM} = S_{KDM}$, так как $S_{BKM} = \frac{1}{2} KF \cdot BM$, $S_{KDM} = \frac{1}{2} KF \cdot MD$,

а $BM = MD$ по условию задачи,

значит $S_{KDM} = \frac{1}{2} \cdot S_{BKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (см^2).

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ см^2.

4*. Рис. 432.

а) $S_{ABD} = S_{ACD}$ по условию задачи.

$S_{ABD} = \frac{1}{2} BK \cdot AD$, $S_{ACD} = \frac{1}{2} CE \cdot AD$, тогда $BK = CE$.

Так как $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, то $BK \parallel CE$.

В четырехугольнике $KBCE$ стороны BK и CE параллельны и равны, значит $KBCE$ – параллелограмм, следовательно, $BC \parallel KE$, т. е. $BC \parallel AD$.

б) $S_{ACD} = S_{BCD}$ по условию задачи.

Так как $S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AM$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot BN$, то $AM = BN$.

Так как $AM \perp CD$ и $BN \perp CD$, то $AM \parallel BN$.

В четырехугольнике $MABN$ стороны AM и BN параллельны и равны, значит, $MABN$ – параллелограмм, следовательно, $AB \parallel MN$, т. е. $AB \parallel CD$.

в) Так как $BC \parallel AD$ и $AB \parallel CD$, то $ABCD$ – параллелограмм, что и требовалось доказать.

II вариант

1. Рис. 433.

В ΔABE $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ($5^2 = 3^2 + 4^2$), по теореме, обратной теореме Пифагора,

ΔABE – прямоугольный, $BE \perp AE$, т.е. BE – высота трапеции. Так как BE и CK – высоты трапеции, то $EBCK$ – треугольник и $BC = EK = 6$ см.

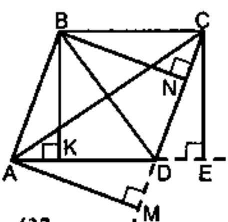


Рис. 432

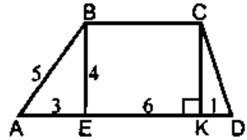


Рис. 433

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} BE \cdot (BC + AD) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (6 + 10) = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 32 см^2.

2. Рис. 434.

ΔABK – прямоугольный, по теореме Пифагора:
$AB^2 = BK^2 + AK^2 = 12^2 + 9^2 = 225$, $AB = 15$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 10 = 75$ см^2.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} AC \cdot 12 = 75$, откуда $AC = 12{,}5$ см.

ΔACD – прямоугольный, $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 12{,}5^2 - 10^2 = 56{,}25$, откуда $AD = 7{,}5$ см.

Ответ: 7,5 см.

3. Рис. 435.

Проведем $ME \parallel AB$, тогда по теореме Фалеса, так как $AB \parallel ME$ и $BM = MD$, то $AE = DE$.
$AKME$ – параллелограмм ($KM \parallel AE$, $AK \parallel ME$),
тогда $EA = KM = 4$ см, значит, $DE = 4$ см, $AD = 8$ см.
ΔABD – прямоугольный, в нем $\angle BDA = 90° - \angle A = 30°$,
$AD = 8$ см, тогда $AB = 4$ см.
По теореме Пифагора $BD^2 = AD^2 - AB^2 = 64 - 16 = 48$,
$BD = 4\sqrt{3}$ см, $S_{ABD} = AB \cdot BD : 2 = 4 \cdot 4\sqrt{3} : 2 = 8\sqrt{3}$ (см^2).

В ΔABM и ΔAMD одна и та же высота AB, $S_{ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM$,

$S_{AMD} = \frac{1}{2} AB \cdot MD$.

Так как $BM = MD$ по условию задачи,

то $S_{ABM} = S_{AMD} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $4\sqrt{3}$ см^2.

4*. Рис. 436.

а) $S_{ABD} = S_{ACD}$ по условию задачи.

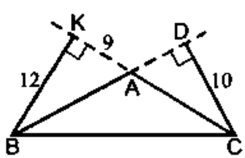


Рис. 434

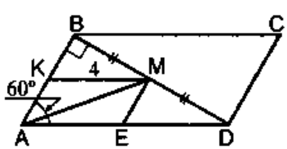


Рис. 435

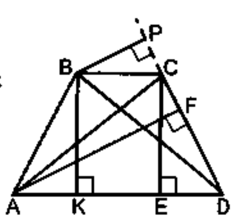


Рис. 436

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE$, $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE$, тогда $BK = CE$.

Так как $BK \perp AD$ и $CE \perp AD$, то $BK \parallel CE$.

В четырехугольнике $KBCE$ стороны BK и CE параллельны и равны, значит, $KBCE$ – параллелограмм,

тогда $BC \parallel KE$, т. е. $BC \parallel AD$.

б) $S_{ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AF$, $S_{BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot BP$, тогда $AF \neq BP$.

В четырехугольнике $FABP$ стороны AF и BP параллельны ($AF \perp CD$, $BP \perp CD$), но не равны, поэтому $FABP$ не является параллелограммом, а это значит AB не параллельна PF, т. е. AB не параллельна CD.

в) Так как $BC \parallel AD$, а AB не параллельна CD, т. е. в четырехугольнике $ABCD$ две стороны параллельны, то $ABCD$ – трапеция.

Подобные треугольники

В данной главе рассматриваются такие вопросы как определение подобных треугольников, отношение площадей подобных треугольников, применение подобия к доказательству теорем и решению задач, вводится понятие синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника и доказываются основные тригонометрические тождества.

Основная цель – сформировать понятие подобных треугольников, выработать умение применять признаки подобия треугольников в процессе доказательства теорем и решения задач, сформировать навыки решения прямоугольных треугольников.

Понятие подобия является одним из важнейших в курсе планиметрии. К моменту изучения темы учащиеся уже знакомы с реальными предметами, дающими наглядное представление о подобных фигурах (географические карты, фотографии, модели автомобилей, кораблей, самолетов и т. д.)

Изучение темы начинается с формирования понятий отношения отрезков и подобия треугольников. Понятие подобия фигур рассматривается в ознакомительном плане.

При изучении признаков подобия достаточно доказать два признака, так как первый из них доказывается с опорой на теорему об отношении площадей треугольников, имеющих равные углы, а доказательства двух других аналогичны. Один из них можно лишь сформулировать и применять затем при решении задач.

Применение подобия треугольников к доказательствам теорем учащиеся изучают на примере теоремы о средней линии треугольника, но познакомить учащихся можно и с другими примерами.

Решение задач на построение методом подобия рассматриваются с учащимися, интересующимися математикой.

Важную роль в изучении как математики, так и смежных дисциплин (особенно физики) играют понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника, с которыми учащиеся знакомятся при изучении данной темы.

Основное внимание уделяется выработке простых навыков в решении прямоугольных треугольников, в частности, с помощью микрокалькулятора.

Урок 31
Определение подобных треугольников

Цели урока:

- Ввести понятие пропорциональных отрезков и подобных треугольников.
- Рассмотреть свойство биссектрисы треугольника и показать его применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока и сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ контрольной работы

а) Общий анализ контрольной работы (сообщить результаты в целом по классу).

б) Анализ наиболее часто встречающихся ошибок.

в) Работа над ошибками (самостоятельно ознакомиться с кратким решением задач, с которыми ученик не справился (см. урок 30), верное решение записать дома).

Подготовка учащихся к восприятию нового материала

(Фронтальная работа с классом.)

- Что называют отношением двух чисел? Что показывает отношение?
- Отношение AB к CD равно 2 : 7. О чем это говорит? Найдите отношение CD к AB.
- В ΔABC $AB : BC : AC = 2 : 4 : 3$, $P_{ABC} = 45$ дм. Найдите стороны треугольника ABC.
- Что называют пропорцией? Верны ли пропорции $1{,}5 : 1{,}8 = 25 : 30$; $18 : 3 = 5 : 30$?
- В пропорции $a : b = c : d$ укажите крайние и средние члены. Сформулируйте основное свойство пропорции.
- Переставив средние или крайние члены пропорции, составьте три верные пропорции:

  а) $12 : 0{,}2 = 30 : 0{,}5$; б) $AB : MN = CD : KP$.
- Найдите неизвестный член пропорции.

  а) $7x : 4{,}2 = 12{,}3 : 6$; б) $x : AB = MN : KP$.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие отношения отрезков.

Определение: Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е. $AB : CD$.

2. Ввести понятие пропорциональных отрезков.

Определение: Отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{CD}{C_1D_1}$.

Например:

Если $AB = 5$ см, $CD = 7$ см, $A_1B_1 = 7{,}5$ см, $C_1D_1 = 10{,}5$ см, то $AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1$, т.е. отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1.

Отрезки AB, CD, MN пропорциональны отрезкам A_1B_1, C_1D_1 и M_1N_1. Найдите C_1D_1 и MN, если $AB = 5$ см, $A_1B_1 = 20$ см, $CD = 6$ см, $M_1N_1 = 8$ см.

3. Ввести понятие подобных фигур (два круга, два квадрата, два мяча разных размеров, изображения на кинопленке и на экране, на фотопленке и на фотографии и т. д.)

4. Ввести понятие подобных треугольников:

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=k$, где k – коэффициент подобия.

Стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 называют *сходственными*.

Определение: Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 51, 52.

Учитель читает условие задачи № 51.

Задание учащимся: заполнить пропуски в тетради.

Учащиеся по указанию учителя читают по одному предложению, исправляя имеющиеся ошибки. Если кто-то допустил ошибку, то другие ее исправляют.

Таким же образом решают задачу № 52.

2. Решение задачи № 535.

Прочитать самостоятельно задачу и ее решение. Вызывается к доске один из наиболее подготовленных учащихся и решает задачу самостоятельно (без помощи учебника, выполнив рисунок и записывая краткое решение). Остальные учащиеся работают в тетрадях.

Вопросы, контролирующие глубину усвоения доказательства:

– Почему $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\dfrac{BD}{CD}$?

– Сформулируйте теорему, на основании которой если $\angle 1 = \angle 2$, то $\dfrac{S_{ABD}}{S_{AD}}=\dfrac{AB}{AC}$.

– Поясните, на каком основании из равенства $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$ следует равенство $\frac{BD}{AB}=\frac{CD}{AC}$.

3. Решить на доске и в тетрадях учащихся задачи № 536 (б), 541.

Один из учащихся решает задачу № 536 (б) на доске, остальные в тетрадях. Отвечать на наводящие вопросы имеет право любой ученик. Таким же образом решается задача № 541.

Задача № 536 (б)

Решение (рис. 437):

Так как $\angle C = \angle BDC$, то ΔBDC – равнобедренный с основанием CD, следовательно, $BC = BD = 16$.

Так как BD – биссектриса ΔABC, то

$$\frac{DC}{BC}=\frac{DA}{AB} \Rightarrow DC=\frac{BC\cdot DA}{AB}=\frac{16\cdot 20}{30}=10\frac{2}{3}.$$

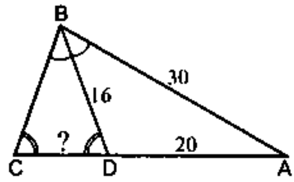


Рис. 437

Ответ: $10\frac{2}{3}$.

Наводящие вопросы:

– Как биссектриса треугольника делит противолежащую сторону?
– Длину какого отрезка необходимо найти для нахождения отрезка CD?
– Как можно вычислить длину отрезка BC?

Задача № 541

Решение:

В ΔABC $\angle A = 106°$, $\angle B = 34° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 140° = 40°$.

В ΔDEF $\angle E = 106°$, $\angle F = 40° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle D = 180° - (\angle E + \angle F) = 180° - 146° = 34°$.

По определению подобных треугольников, два треугольника называют правильными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.

В ΔABC и ΔDEF $\angle A = \angle E = 106°$; $\angle B = \angle D = 34°$;

$\angle C = \angle F = 40°$; $BC : DF = 7{,}6 : 22{,}8 = 1 : 3$;

$AC : EF = 4{,}4 : 13{,}2 = 1 : 3$;

$AB : DE = 5{,}2 : 15{,}6 = 1 : 3 \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ответ: $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Наводящие вопросы:

– Когда два треугольника подобны?
– Равны ли углы этих треугольников?
– Пропорциональны ли сходственные стороны данных треугольников?

– Подобны ли ΔABC и ΔEDF?

4. Решить самостоятельно задачи № 534 (в), 537.

Задача № 534 (в)

Краткое решение:

$AB : MM_1 = 9 : 1$; $BD : M_1M_2 = 9 : 2 = 4{,}5$; $9 \neq 4{,}5 \Rightarrow$ отрезки AB и BD не пропорциональны отрезкам MM_1 и M_1M_2.

Задача № 537

Краткое решение:

$$AD \text{ – биссектриса } \Delta ABC \Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow CD = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{3}{2}BD.$$

$$CD + DB = BC \Rightarrow CD + BD = \frac{3}{2}BD + BD = 20 \Rightarrow BD = 8 \text{ (см)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow DC = 20 - 8 = 12 \text{ (см)}.$$

Ответ: $BD = 8$ см, $DC = 12$ см.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 56, 57, вопросы 1, 2, 3; задача № 535 (устно);

Решить задачи № 534 а), б), 536 а), 538, 542 и задачу № 53 из рабочей тетради.

Урок 32
Отношение площадей подобных треугольников

Цели урока:

- Закрепить понятия пропорциональных отрезков и подобных треугольников.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение свойства биссектрисы треугольника и определения подобных треугольников.
- Рассмотреть теорему об отношении площадей подобных треугольников и показать ее применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

К доске вызвать трех учащихся: один из них готовит доказательство теоремы, двое оформляют на доске домашние задачи. В это время с остальными учащимися идет небольшой теоретический опрос, а затем решение задач на готовых чертежах. 3–6 учащихся работают по индивидуальным карточкам.

После того, как все задания выполнены, учащиеся слушают ответы своих товарищей, работавших у доски.

Теоретический опрос

Провести опрос по вопросам 1–3.

Подготовиться и доказать свойство биссектрисы треугольника.

Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 538, 542.

Задача № 538

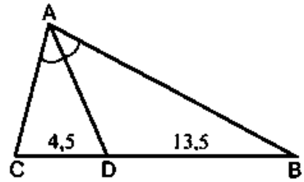


Рис. 438

Решение (рис. 438):

AD – биссектриса $\Delta ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CD}{AC} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB = \frac{AC \cdot BD}{CD} = \frac{AC \cdot 13{,}5}{4{,}5} = 3AC.$$

$$P_{ABC} = AB + AC + BC = 3AC + AC + (CD + DB) = 4AC + 18 = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \frac{42-18}{4} = 6 \text{ (см)} \Rightarrow AB = 3 \cdot 6 = 18 \text{ (см)}.$$

Ответ: $AC = 6$ см, $AB = 18$ см.

Наводящие вопросы:

- В каком отношении биссектриса AD треугольника ABC делит сторону BC?
- Что вы можете сказать об отношении отрезков AB и AC?
- Составьте уравнение, используя отношение отрезков AB и AC и значение периметра треугольника ABC.

Задача № 542

$$\Delta ABC \sim \Delta KMN \Rightarrow \frac{KM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{KN}{AC}.$$

$$\frac{KM}{AB} = 2{,}1 \Rightarrow KM = 2{,}1 \cdot AB = 2{,}1 \cdot 4 = 8{,}4 \text{ (см)}.$$

$$\frac{MN}{BC} = 2{,}1 \Rightarrow MN = 2{,}1 \cdot BC = 2{,}1 \cdot 5 = 10{,}5 \text{ (см)}.$$

$$\frac{KN}{AC} = 2{,}1 \Rightarrow KN = 2{,}1 \cdot AC = 2{,}1 \cdot 7 = 14{,}7 \text{ (см)}.$$

Ответ: $KM = 8{,}4$ см, $MN = 10{,}5$ см, $KN = 14{,}7$ см.

Наводящие вопросы:

- Какие треугольники называются подобными?
- Чему равно отношение сходственных сторон MN и BC, KN и AC?
- Чему равны стороны треугольника KMN?

Работа по индивидуальным карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. Треугольники KPF и EMT подобны, причем, $KP : ME = PF : MT = KF : ET$, $\angle F = 30°$, $\angle E = 49°$. Найдите остальные углы этих треугольников.
2. Биссектриса BD делит сторону AC треугольника ABC на отрезки AD и CD, равные соответственно 7 см и 10,5 см. Найдите периметр треугольника ABC, если известно, что $AB = 9$ см.

II уровень (карточка № 2)

1. Рис. 439. Дано: $\Delta BDC \sim \Delta ABC$, $AD = 16$ см, $DC = 9$ см. $\angle ABC$ и $\angle BEC$ – тупые. Найти: BC.
2. Периметр треугольника равен 70 см, две его стороны равны 24 и 32 см. Найдите отрезки, на которые биссектриса треугольника делит его третью сторону.

III уровень (карточка № 3)

1. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ на два подобных треугольника ABC и ACD, $BC = 8$ см, $AD = 18$ см. Найдите AC.
2. В равнобедренном треугольнике точка E – середина основания AC, а точка K делит сторону BC в отношении 2 : 5, считая от вершины C. Найдите отношение, в котором прямая BE делит отрезок AK.

Решение задач по готовым чертежам с целью подготовки к восприятию нового материала

(Устная фронтальная работа с классом.)

1. Рис. 440. $S_{ABD} = 12$ см^2.
Найти: S_{ACD}.
2. Рис. 441. $S_{ABC} : S_{MNK} = 3 : 7$.
Найти: MN.
3. Рис. 442. $S_{BMN} = 4$ см^2.
Найти: S_{ABC}.
4. Рис. 443. $BK : KD = 1 : 3$,
$CO : OD = 2 : 3$. $S_{AOC} = 4$ см^2.
Найти: S_{BOK}.

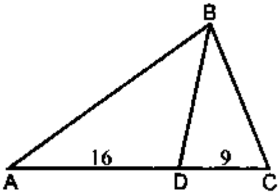


Рис. 439

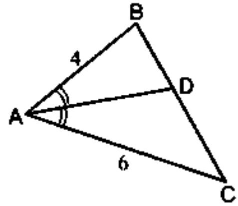


Рис. 440

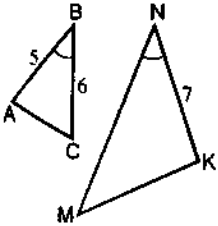


Рис. 441

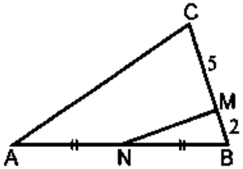


Рис. 442

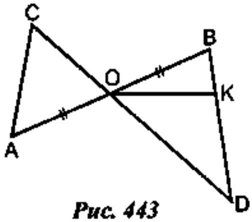


Рис. 443

Ответы и указания к задачам:

1) $\dfrac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\dfrac{AB\cdot AD}{AC\cdot AD}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{12}{S_{ACD}}\Rightarrow S_{ACD}=18\ (\text{см}^2).$

2) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNK}}=\dfrac{AB\cdot BC}{MN\cdot NK}\Rightarrow\dfrac{3}{7}=\dfrac{5\cdot 6}{MN\cdot 7}\Rightarrow MN=15.$

3) $\dfrac{S_{BMN}}{S_{ABC}}=\dfrac{BM\cdot BN}{BC\cdot BA}=\dfrac{2\cdot BN}{7\cdot 2BN}=\dfrac{1}{7}\Rightarrow S_{ABC}=28\ (\text{см}^2).$

4) $\dfrac{S_{AOC}}{S_{OBD}}=\dfrac{OC\cdot OA}{OB\cdot OD}\Rightarrow\dfrac{4}{S_{OBD}}=\dfrac{OC}{OD}\cdot\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OC}{OD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow S_{OBD}=6\ (\text{см}^2).$

$\dfrac{S_{OBK}}{S_{ODK}}=\dfrac{OB}{OD}=\dfrac{BK}{KD}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow S_{OBK}=1{,}5\ (\text{см}^2).$

III. Изучение нового материала

1. Распределить учащихся по творческим группам и предложить обсудить в группах задачу: «Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом подобия k. Найти отношение их площадей».

2. Заслушать варианты решений, выбрать из предложенных наиболее удачный, и решение записать в тетрадях учащихся и на доске.

Возможный вариант решения:

Пусть $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$, тогда $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $\angle C=\angle C_1$,

$\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=k.$

Т. к. $\angle A=\angle A_1$, то $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}=\dfrac{AB}{A_1B_1}\cdot\dfrac{AC}{A_1C_1}=k\cdot k=k^2.$

Вывод: отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 54. Учащиеся работают самостоятельно, затем один из учащихся читает свое решение, остальные проверяют, исправляют ошибки.

2. Решить письменно задачу № 545 на доске и в тетрадях (записать краткое решение).

Один из учащихся самостоятельно решает задачу на доске, остальные – в тетрадях. После завершения работы проверяется правильность решения.

Задача № 545

Решение:

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1,\ k=\frac{6}{5}\ \Rightarrow\ \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{36}{25}.$$

S_{ABC} на 77см^2 больше $S_{A_1B_1C_1}$ $\Rightarrow$

$$S_{ABC}=S_{A_1B_1C_1}+77\Rightarrow\frac{S_{A_1B_1C_1}+77}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{36}{25}\Rightarrow$$

$$25\cdot(S_{A_1B_1C_1}+77)=36\cdot S_{A_1B_1C_1}$$

$$S_{A_1B_1C_1}\cdot(36-25)=25\cdot 77$$

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{25\cdot 77}{11}=25\cdot 7=175\ (\text{см}^2)\Rightarrow$$

$$S_{ABC}=77+175=252\ (\text{см}^2)$$

Ответ: 175 см^2 и 252 см^2.

Наводящие вопросы:

– Чему равно отношение площадей подобных треугольников, если их сходственные стороны относятся как 6 : 5?

– Составьте уравнение, исходя из условий задачи.

3. Работа в группах по решению задач № 547, 548 (обсудить принцип решения задач, варианты решений заслушать всем классом).

Задача № 547

Краткое решение:

$$\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1\Rightarrow\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k\Rightarrow AB=k\cdot A_1B_1,$$

$$BC=k\cdot B_1C_1,\ AC=k\cdot A_1C_1\Rightarrow\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB+BC+AC}{A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1}=$$

$$=\frac{kA_1B_1+kB_1C_1+kA_1C_1}{A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1}=\frac{k\left(A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1\right)}{A_1B_1+B_1C_1+A_1C_1}=k.$$

Задача № 548

Краткое решение:

$$\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1,\ \frac{BC}{B_1C_1}=\frac{1{,}4\ \text{м}}{56\ \text{см}}=\frac{5}{2}=k\Rightarrow\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}=k=\frac{5}{2}.$$

Ответ: 5 : 2.

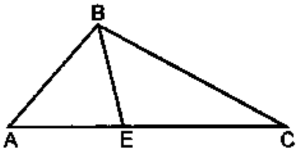


Рис. 444

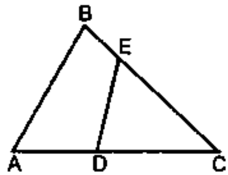


Рис. 445

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 – сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $BC : B_1C_1 = 2{,}5$, $A_1C_1 = 4$ см, $\angle B = 47°21'$. Найдите $\angle B_1$, AC и отношение площадей этих треугольников.
2. Площади двух подобных треугольников равны 16 см^2 и 25 см^2. Одна из сторон первого треугольника равна 2 см. Найдите сходственную ей сторону другого треугольника.

3*. Рис. 444.
Дано: $\Delta BEC \sim \Delta ABC$, $AE = 16$ см, $CE = 9$ см, $\angle BEC$ – тупые.
Найти: BC.

II вариант

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 – сходственные стороны. Найдите $\angle C_1$, AB и отношение площадей этих треугольников, если $AC : A_1C_1 = 4{,}4$, $A_1B_1 = 5$ см, $\angle C = 15°31'$.
2. Две сходственные стороны подобных треугольников равны 2 см и 5 см. Площадь первого треугольника 8 см^2.
Найдите площадь второго треугольника.

3*. Рис. 445.
Дано: $\Delta ABC \sim \Delta BEC$, DE не параллелен AB, $AD = 3$ см, $DC = 5$ см, $BC = 7$ см. *Найти*: CE.

II уровень

I вариант

1. MH и CP, MK и CT – сходственные стороны подобных треугольников MHK и CPT. Найдите TP, угол H и отнощение площадей треугольников CPT и MHK, если $MH : CP = 1 : 3$, $HK = 11$ см, $\angle P = 31°$.
2. Периметр подобных треугольников относится как 2 : 3, сумма их площадей равна 260 см^2. Найдите площадь каждого треугольника.

3*. Диагональ AC делит трапецию $ABCD$ на два подобных треугольника ABC и ACD, $BC = 4$ см, $AD = 9$ см. Найдите боковые стороны трапеции, если известно, что их сумма равна 10 см.

II вариант

1. Треугольники KEP и COT подобны, KE и CO, KP и CT – их сходственные стороны, $KE : CO = 1 : 5$, $EP = 2{,}2$ см, $\angle T = 42°$. Найдите угол P, OT и отношение площадей треугольников KEP и COT.
2. Площади двух подобных треугольников равны 50 дм^2 и 32 дм^2, сумма их периметров равна 117 дециметров. Найдите периметр каждого треугольника.
3*. В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) AC – биссектриса угла A делит трапецию на два подобных треугольника ABC и ACD, $AB = 9$ см, $CD = 12$ см. Найдите периметр трапеции.

III уровень

I вариант

1. AB и A_1B_1, BC и B_1C_1 – сходственные стороны подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Найдите B_1C_1, $\angle A$ и отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, если $BC : A_1C_1 = 5 : 2$, $AC = 7$ дм, $\angle B_1 = 17°$.
2. Прямая DE, параллельная сторона AC треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBE, стороны которого в три раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь трапеции $ADEC$, если площадь треугольника ABC равна 27 см^2.
3*. Отрезок BK (K принадлежит стороне AC) разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника ABK и KBC, причем $S_{ABK} : S_{BKC} = 1 : 3$. Найдите углы треугольника.

II вариант

1. В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ AB и C_1A_1, BC и A_1B_1 – сходственные стороны. $BC : A_1B_1 = 3 : 4$, $AC = 6$ см, $\angle A_1 = 15°$. Найдите B_1C_1, угол B и отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.
2. Прямая DE, параллельная сторона AC треугольника ABC, отсекает от него треугольник DBC, стороны которого в четыре раза меньше сторон данного треугольника. Найдите площадь ΔABC, если площадь трапеции $ADEC$ равна 30 см^2.
3*. Отрезок FP разбивает треугольник EFM на два подобных треугольника EFP и PFM, причем $\angle PFM = 60°$. Площадь треугольника PFM равна 30 см^2. Найдите площадь ΔEFM.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 58, вопросы 4; повторить п. 52;

Решить задачи № 544, 543, 546, 549;

Дополнительные задачи

I уровень

В подобных треугольниках ABC и KMN равны углы B и M, C и N, $AC = 3$ см, $KN = 6$ см, $MN = 4$ см, $\angle A_1 = 30°$.

Найдите:

а) BC, $\angle K$;

б) отношение площадей треугольников ABC и KMN;

в) AE и BE, если известно, что CE – биссектриса треугольника ABC, $AB = 3{,}5$ см.

II уровень

В прямоугольном ΔABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$, $AB = 12$ см, CD – высота. Докажите, что ΔACD подобен ΔABC, найдите отношение их площадей и отрезки, на которые биссектриса угла A делит катет BC.

Урок 33
Первый признак подобия треугольников

Цели урока:

- Закрепить знания, умения и навыки учащихся по теме «Определение подобных треугольников, отношение их площадей» в процессе решения задач.
- Рассмотреть первый признак подобия треугольников и сформировать у учащихся навыки применения этого признака при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Вызвать к доске двух учащихся для доказательства теорем. Двух других попросить заранее подготовить домашнее задание на доске. После проверки домашних задач заслушать доказательства теорем.

Теоретический опрос

а) Доказать теорему об отношении площадей подобных треугольников (подготовиться одному ученику у доски, ответ заслушать после проверки домашних задач).

б) Сформулировать теорему об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу.

Проверка домашнего задания

Проверка решения домашних задач № 543, 549. (Дополнительные задачи проверить индивидуально во время решения задач на готовых чертежах.)

Решение задач с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

(Самостоятельное решение с последующим обсуждением решения.) Обсуждение решений можно организовать таким образом: один из учащихся выходит к доске и предлагает свое решение, остальные предлагают свое или соглашаются с решением первого.

1. Рис. 446.
Дано: $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $CB_4 = 12$ см, $S_{A_4B_4C} = 32$ см^2.
Найти: а) B_1B_2, B_2B_4; б) $S_{A_3B_3C}$.
2. Рис. 447.
Дано: ΔABC, AD – биссектриса, $AB = 4$ см, $AC = 8$ см, $BC = 6$ см.
Найти: а) BD, CD; б) $S_{ABC} : S_{ABD}$.
3. Рис. 448.
Дано: $S_{ABC} = 36$ см^2, $AN : NC = 3 : 1$, $BM : MC = 2 : 1$, $AK = KB$.
Найти: а) S_{CMN}; б) S_{AKN}; в) S_{BKNM}.

Краткое решение задач

1. По теореме Фалеса $CB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = 3$ см, следовательно, $B_2B_4 = 6$ см.

$$\Delta A_3B_3C \sim \Delta A_4B_4C,\ k = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_{A_3B_3C}}{S_{A_4B_4C_4}} = \frac{9}{16} \Rightarrow S_{A_3B_3C} = 18 \text{ см}^2.$$

Ответ: $B_1B_2 = 3$ см, $B_2B_4 = 6$ см, $S_{A_3B_3C} = 18$ см^2.

2. $\dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AB}{BD} \Rightarrow \dfrac{8}{CD} = \dfrac{4}{6 - CD} \Rightarrow CD = 4$ см; $BD = 2$ см.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{AB \cdot BC}{AB \cdot BD} = \frac{4 \cdot 6}{4 \cdot 2} = \frac{3}{1}.$$

Ответ: $BD = 2$ см; $CD = 4$ см; $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \dfrac{3}{1}$.

3. а) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{CMN}} = \dfrac{CB \cdot CA}{CM \cdot CN} = \dfrac{3CM \cdot 4CN}{CM \cdot CN} = 12 \Rightarrow S_{CMN} = 3$ см^2.

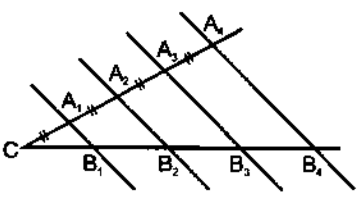
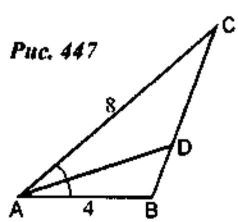


Рис. 446

Рис. 447



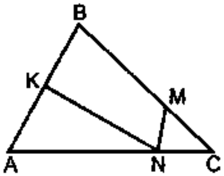


Рис. 448

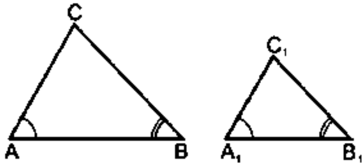


Рис. 449

б) $\dfrac{S_{ABC}}{S_{AKN}}=\dfrac{AB\cdot AC}{AK\cdot AN}=\dfrac{2AK\cdot 4NC}{AK\cdot 3NC}=\dfrac{8}{3}\Rightarrow S_{AKN}=13{,}5\ \text{см}^2.$

в) $S_{BKNM} = 36 - 3 - 13{,}5 = 19{,}5$ (см^2).

Ответ: а) $S_{CMN} = 3$ см^2; б) $S_{AKN} = 13{,}5$ см^2; в) $S_{BKNM} = 19{,}5$ см^2.

III. Изучение нового материала

1. Сформулировать первый признак подобия треугольников.

2. Доказать первый признак подобия треугольников и записать план доказательства на доске и в тетрадях учащихся.

Рис. 449.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:

1) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (\angle A_1 + \angle B_1) = \angle C_1$.

2) $\angle A = \angle A_1$, тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{AC\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$. (1)

3) $\angle C = \angle C_1$, тогда $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\dfrac{AC\cdot BC}{A_1C_1\cdot B_1C_1}$. (2)

4) Из (1) и (2) следует $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$. (3)

5) Т. к. $\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$, то $BC : B_1C_1 = CA : C_1A_1$. (4)

6) Из (3) и (4) следует $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{CA}{C_1A_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

П. 5 доказательства теоремы можно рекомендовать доказать самостоятельно на уроке или дома на усмотрение учителя.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях:

Решить самостоятельно задачу № 55 с последующим обсуждением решения:

– Какие два угла треугольника *ABC* равны двум углам треугольника *DBE*? Почему?

– Чему равен коэффициент подобия данных треугольников?

Решить задачу № 56 самостоятельно (в конце урока рабочие тетради можно собрать для проверки).

2. Решить задачу № 551 а) учебника самостоятельно после обсуждения плана решения задачи.

План решения задачи:

1) Доказать, что $\Delta AED \sim \Delta FEC$.
2) Найти сходственные стороны этих треугольников и коэффициент подобия.
3) Найти EF и FC.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о треугольниках AED и FEC?

– Как найти коэффициент подобия этих треугольников?

Краткое решение (рис. 450):

$\Delta AED \sim \Delta FEC$ ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$, т. к. $BC \parallel AD$) $\Rightarrow$ $k = \dfrac{AE}{FE} = \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{FC}$.

Так как $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{8}{4} = 2$, то $k = 2 \Rightarrow$

$\dfrac{AE}{FE} = 2$ и $FE = \dfrac{AE}{2} = 5$ (см). $\dfrac{AD}{FC} = 2$ и $FC = \dfrac{AD}{2} = 3{,}5$ (см).

Ответ: $FC = 3{,}5$ см, $FE = 5$ см.

3. Решить самостоятельно задачу № 555 а) (правильность решения проверить индивидуально).

Краткое решение (рис. 451):

$AMNP$ – параллелограмм. $\dfrac{PN}{MN} = \dfrac{2}{3}$, тогда $PN = x$, $MN = 1{,}5x$.

$PC = 15 - 1{,}5x$; $BM = 10 - x$.

$\Delta PNC \sim \Delta MBN \Rightarrow \dfrac{PC}{MN} = \dfrac{PN}{BM} \Rightarrow \dfrac{15 - 1{,}5x}{1{,}5x} = \dfrac{x}{10 - x} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5$ см, $PN = 5$ см, $MN = 7{,}5$ см.

Ответ: 5 см; 7,5 см.

Дополнительная задача:

На продолжении сторон DC (за точку C) и BA (за точку A) параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки K и E. KE пересекает сторону BC в точке M, а сторону AD – в точке F. Докажите, что $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

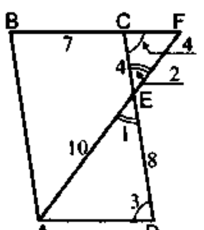


Рис. 450

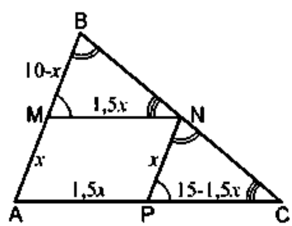


Рис. 451

Решение (рис. 452):

$\Delta AEF \sim \Delta CKM$ по двум углам ($\angle E = \angle K$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей EK; $\angle AFE = \angle MFD$, $\angle KMC = \angle BMF$ как вертикальные, а $\angle MFD = \angle BMF$ как накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей MF).

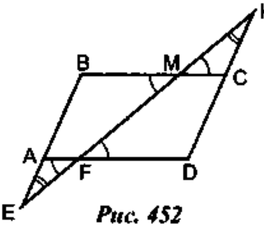


Рис. 452

Сходственные стороны подобных треугольников пропорциональные, поэтому $\frac{AE}{CK} = \frac{EF}{KM} = \frac{AF}{CM}$, т. е. $AE : CK = AF : CM$, откуда $AE \cdot MC = KC \cdot AF$.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 49, вопрос 5;

Решить задачи № 550, 551 б), 553, 555 б).

Дополнительная задача

В остроугольном треугольнике ABC BD и AE – высоты. Докажите, что $DC \cdot AC = EC \cdot BC$.

Урок 34
Решение задач на применение первого признака подобия треугольников

Цель урока:

- Сформировать у учащихся навыки решения задач на применение первого признака подобия треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

1) Подготовить у доски доказательство теоремы, выражающей первый признак подобия треугольников. (Один ученик работает у доски.)

2) Фронтальный теоретический опрос.

– Сформулируйте первый признак подобия треугольников.
– Чему равно отношение периметров подобных треугольников?
– Какие треугольники называются подобными?
– Сформулируйте теорему об отношении площадей подобных треугольников.

3) Заслушать доказательство теоремы.

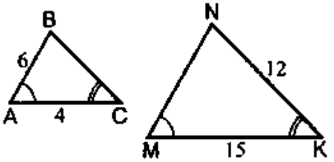


Рис. 453

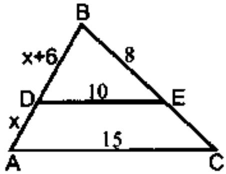


Рис. 454

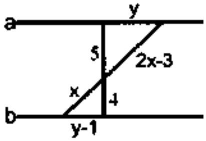


Рис. 455

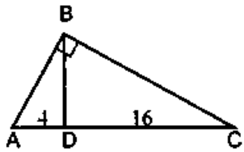


Рис. 456

III. Решение задач по готовым чертежам

Решение – самостоятельно с последующим обсуждением, в это время учитель индивидуально проверяет домашнее задание. Обсуждение проводится следующим образом: один из учащихся по желанию выходит к доске и рассказывает свое решение, остальные учащиеся указывают на ошибки в решении, предлагают свое решение или соглашаются с ним.

1. Рис. 453. *Найти*: BC, MN.
2. Рис. 454. *Дано*: $DE \parallel AC$.
   Найти: AB, BC.
3. Рис. 455. *Дано*: $a \parallel b$.
   Найти: x, y.
4. Рис. 456.
   Найти: BD.
5. Рис. 457.
   Найти: CO, BO.
6. Рис. 458.
   Найти: BC.

Ответы к задачам:

1. $BC = 3{,}2$, $MN = 22{,}4$;
2. $AB = 18$, $BC = 12$;
3. $x = 4$, $y = 5$;
4. $BD = 8$;
5. $CO = 4$, $BO = 12$;
6. $BC = 15$.

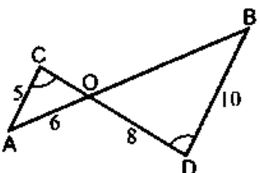


Рис. 457

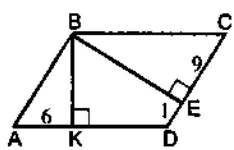


Рис. 458

IV. Решение задач

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 58 с последующей самопроверкой (один из учащихся читает решение).

2. Решить задачу № 554 учебника на доске и в тетрадях.

Один из учащихся решает у доски, остальные – в тетрадях.

Задача № 554

Решение (рис. 459):

$\Delta AMD \sim \Delta BMC$ по двум углам ($\angle DAM = \angle CBM$, $\angle M$ – общий), следовательно, $\frac{AD}{BC} = \frac{AM}{BM} = \frac{DM}{CM}$.

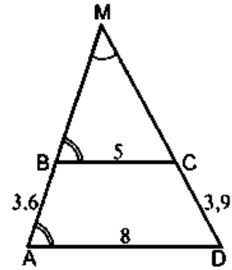


Рис. 459

Так как $\frac{AD}{BC} = \frac{8}{5}$, то $\frac{AM}{BM} = \frac{8}{5}$, $\frac{DM}{CM} = \frac{8}{5}$.

$AM = AB + BM$, тогда $AM = 3{,}6 + BM \Rightarrow$

$\frac{3{,}6 + BM}{BM} = \frac{8}{5} \Rightarrow 5 \cdot (3{,}6 + BM) = 8 \cdot BM$.

$18 = 3BM \Rightarrow BM = 6$ (см).

$DM = DC + MC$, тогда $DM = 3{,}9 + BM \Rightarrow \frac{3{,}9 + MC}{MC} = \frac{8}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 \cdot (3{,}9 + MC) = 8 \cdot MC$, отсюда $3MC = 19{,}5$; $MC = 6{,}5$ (см).

Ответ: $BM = 6$ см, $MC = 6{,}5$ см.

Наводящие вопросы:

– Есть ли на рисунке подобные треугольники? Почему вы так считаете?
– Найдите коэффициент подобия этих треугольников?
– Каким соотношением связаны сходственные стороны AM и BM? DM и CM?

3. Самостоятельно разобраться с решением задачи № 556 с последующим обсуждением решения.

Вопросы для обсуждения:

– Почему $\angle O = \angle CAC_1$? (*Это соответственные углы при параллельных прямых AC_1 и OD и секущей OA.*)
– Почему $\angle OAB = \angle C$? (*Это соответственные углы при параллельных прямых AB и CD и секущей AC.*)
– Почему $OA : AC = OB : AC_1$? (Это *сходственные стороны подобных треугольников.*)
– Докажите, что $AC_1 = BD$. (*BAC_1D – параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ по условию задачи, $AC_1 \parallel BD$ как противолежащие стороны параллелограмма.*)
– Объясните, каким образом из равенств $OA : AC = OB : AC_1$ и $AC_1 = BD$ получилось равенство $OA : OB = AC : BD$.

4. Решить задачу № 557 а) полуустно, на доске подготовить рисунок.

Задача № 557(а)

Краткое решение (рис. 460):

$\Delta ABC \sim \Delta ADE.$

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{22-8}{22}=\frac{AC}{AC+10} \Rightarrow AC=17{,}5(\text{см}).$$

Ответ: $AC = 17{,}5$см.

Наводящие вопросы

– Есть ли на рисунке подобные треугольники? Докажите их подобие.

– Составьте отношение сходственных сторон и найдите AC.

V. Самостоятельное решение задач

Решить самостоятельно задачи № 557 б), 552 в).

Краткое решение задач.

Задача № 557 (б)

Краткое решение:

$$\Delta ABC \sim \Delta ADE \Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{10}{AD}=\frac{8}{AC+CE}=\frac{4}{DE} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10}{AD}=\frac{8}{12}=\frac{4}{DE} \Rightarrow AD=\frac{10\cdot 12}{8}=15(\text{см}),\ DE=\frac{12\cdot 4}{8}=6(\text{см}).$$

$BD = AD - AB = 15 - 10 = 5$(см).

Ответ: $BD = 5$ см, $DE = 6$ см.

Задача № 552 (в)

Краткое решение (рис. 461):

Пусть $AO = x$ см, тогда $OC = AC - AO = 15 - x$ (см).

$$\Delta AOB \sim \Delta COD \Rightarrow \frac{AO}{CO}=\frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{x}{15-x}=\frac{96}{24} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 24x = 1440 - 96;\ 120x = 1440;\ x = 12$ (см), т. е. $AO = 12$ см.

Ответ: $AO = 12$ см.

Дополнительная задача

Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Периметры треугольников BOC и AOD относятся как $2:3$, $AC = 20$.

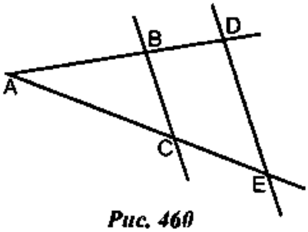


Рис. 460

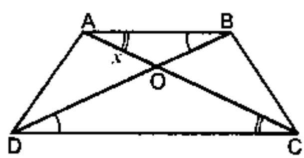


Рис. 461

Найдите длины отрезков AO и OC.

Решение (рис. 462):

$\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по двум углам ($\angle CBO = \angle ADO$, $\angle BCO = \angle DAO$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущих AC и BD), тогда

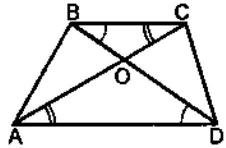


Рис. 462

$$\frac{P_{BOC}}{P_{ABO}} = \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{2}{3},$$

т. е. $OC : OA = 2 : 3$, $OA = 1{,}5\ OC$.

Так как $AC = 20$, то $AC = AO + OC = 1{,}5\ OC + CO = 20$, откуда $OC = 8$, тогда $AO = 12$.

Ответ: $AO = 12$, $OC = 8$.

VI. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Повторить п. 59;

Решить задачи № 552 а), б), 557 в), 558, № 556.

Дополнительная задача:

В трапеции $ABCD$ (AD и BC – основания) точка K лежит на стороне CD, причем $CK : KD = 1 : 2$. AK пересекает BD в точке O. Докажите, что если $BC : AD = 1 : 2$, $BO = OD$.

Урок 35

Второй и третий признаки подобия треугольников

Цель урока:

- Рассмотреть второй и третий признаки подобия треугольников.
- Показать применение второго и третьего признаков подобия треугольников при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Работа в рабочих тетрадях

Самостоятельно решить задачу № 57 с последующим обсуждением решения:

– Докажите, что $\Delta ABF \sim \Delta CDF$.

– Чему равен коэффициент подобия треугольников ABF и CDF?

– Найдите отношение сторон BF и DF.

– Чему равно значение DF?

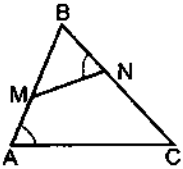


Рис. 463

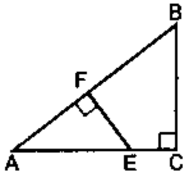


Рис. 464

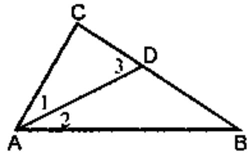


Рис. 465

Самостоятельное решение задач на готовых чертежах

В тетрадях записать краткое решение.

1. Рис. 463. $\angle N = \angle A$, $BC = 12$ см, $CM = 6$ см, $CN = 4$ см.
   Найти: AC.
2. Рис. 464.
   $BC \perp AC$, $EF \perp AB$, $BC = 12$ см, $EF = 6$ см, $AE = 10$ см.
   Найти: AB.
3. Рис. 465. $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$, $CD = 4$ см, $BC = 9$ см.
   Найти: AC.

Обсуждение решений задач, с которыми не справились большинство учащихся.

Пока учащиеся решают задачи, учитель проверяет их решения.

Решение задач:

1. $\Delta ABC \sim \Delta NMC \Rightarrow \dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{MC} = \dfrac{AC}{NC} \Rightarrow \dfrac{AB}{NM} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{AC}{4}$, откуда
   $AC = 12 \cdot 4 : 6 = 8$ см.

Ответ: $AC = 8$ см.

2. $\Delta ABC \sim \Delta AEF \Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{AF} \Rightarrow \dfrac{AB}{10} = \dfrac{12}{6} = \dfrac{AC}{AF}$, откуда
   $AB = 10 \cdot 12 : 6 = 20$ см.

Ответ: $AC = 6$ см.

3. $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2 = \angle CAB \Rightarrow \Delta ACD \sim \Delta BCA \Rightarrow \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{AD}{BA} \Rightarrow$
   $\Rightarrow \dfrac{AC}{9} = \dfrac{4}{CA} = \dfrac{AD}{BA}$, откуда $AC_2 = 36$, $AC = 6$ см ($AC > 0$).

Ответ: $AC = 6$ см.

III. Изучение нового материала

Второй признак подобия треугольников

Теорема: Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.

Учащиеся записывают в тетрадях план-конспект доказательства теоремы.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство (рис. 466):

а) $\Delta ABC_2 : \angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$.

б) $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1$, отсюда $AB : A_1B_1 = AC_2 : A_1C_1$.

в) Так как $AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$ (по условию) и $AB : A_1B_1 = AC_2 : A_1C_1$, следовательно, $AC = AC_2$.

г) $\Delta ABC = \Delta ABC_2$ (AB – общая сторона, $AC = AC_2$, $\angle A = \angle 1$) $\Rightarrow \angle B = \angle 2 = \angle B_1$.

д) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ($\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$).

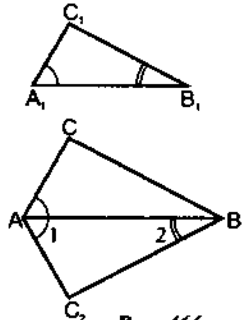


Рис. 466

Третий признак подобия треугольников

Теорема: Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

План-конспект доказательства теоремы.

Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство (рис. 467):

а) $\Delta ABC_2 : \angle 1 = \angle A_1$, $\angle 2 = \angle B_1$.

б) $\Delta ABC_2 \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC_2}{B_1C_1} = \dfrac{C_2A}{C_1A_1}$.

в) $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$ (по условию) и

$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC_2}{B_1C_1} = \dfrac{C_2A}{C_1A_1}$ (п. 2), отсюда $BC = BC_2$, $CA = C_2A$.

г) $\Delta ABC = \Delta ABC_2$ (AB – общая сторона, $BC = BC_2$, $CA = C_2A$), отсюда $\angle A = \angle 1$, $\angle 1 = \angle A_1 \Rightarrow \angle A = \angle A_1$.

д) $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ ($AB : A_1B_1 = AC : A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$).

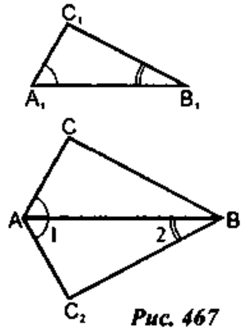


Рис. 467

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 59, 60 самостоятельно с последующим обсуждением с менее подготовленными учащимися.

Задача № 59

– Каким является $\angle C$ для треугольников ABC и MNC?

– Чему равно отношение сторон, заключающих этот угол ($AC : CN$ и $BC : CM$)?

– Что можно сказать о сторонах AC и BC треугольника ABC и сторонах CN и CM треугольника MNC?
– Какой признак подобия треугольников был применен при доказательстве подобия треугольников MNC и ABC?

Задача № 60

– Чему равно отношение сторон MN и CD, MP и CE, NP и DE треугольников MNP и CDE?
– Что вы можете сказать о сторонах треугольников MNP и CDE?
– Укажите признак, на основании которого треугольники MNP и CDE подобны.

Более подготовленные учащиеся после решения данных задач решают дополнительные задачи.

Дополнительные задачи:

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$, BE и B_1E_1 – биссектрисы, $\angle B = \angle B_1$, $AE : EC = A_1E_1 : E_1C_1$. *Докажите*, что $\Delta ABE \sim \Delta A_1B_1E_1$.
2. В треугольнике ABC $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$. Точка E лежит на стороне AB. Внутри треугольника взята точка M так, что $MB = 5{,}25$, $ME = 4{,}5$, $AE = 1$. Прямая BM пересекает AC в точке P. *Докажите*, что ΔAPB равнобедренный.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 60, 61, вопросы 6, 7;

Решить задачи № 559, 560, 561.

Дополнительная задача

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ BD и B_1D_1 – медианы, $\angle A = \angle A_1$, $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$. Докажите, что треугольник BDC подобен треугольнику $B_1D_1C_1$.

Урок 36
Решение задач на применение признаков подобия треугольников

Цель урока:

- Сформировать у учащихся навыки применения признаков подобия треугольников при решении задач.
- Совершенствовать навыки доказательств теорем.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 559, 560 б).

Два ученика друг за другом выходят к доске и устно рассказывают решение задачи по ранее заготовленным на доске чертежам. Остальные учащиеся слушают решение задачи, отмечают ошибки в решении. 3–6 учащихся работают по индивидуальным карточкам.

Задача № 559

Краткое решение (рис. 468):

$AB : AD = 5 : 8$; $AF : AC = 10 : 16 = 5 : 8$.

$\angle BAF = \angle CAD \Rightarrow \Delta BAF \sim \Delta ADC$ по двум сторонам и углу между ними.

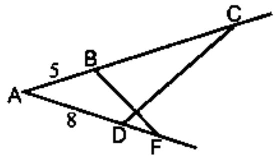


Рис. 468

Задача № 560 (б)

Краткое решение:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{1{,}7\ \text{см}}{34\ \text{дм}}=\frac{1}{200},\ \frac{BC}{B_1C_1}=\frac{3\ \text{см}}{60\ \text{дм}}=\frac{1}{200},$$

$$\frac{CA}{C_1A_1}=\frac{4{,}2\ \text{см}}{84\ \text{дм}}=\frac{1}{200},\ \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CA}{C_1A_1}=\frac{1}{200}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам.

III. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

- Сформулируйте признаки подобия треугольников.
- Докажите теоремы, выражающие второй и третий признаки подобия треугольников. (Два ученика готовят доказательства теорем у доски.)

Заслушать доказательства теорем.

Работа по индивидуальным карточкам

I уровень

Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если известно, что:

1. $AB = 10$ см; $BC = 5$ см; $AC = 7$ см; $A_1B_1 = 15$ см; $B_1C_1 = 7{,}5$ см; $A_1C_1 = 9{,}5$ см?
2. $\angle A = 37°$, $\angle B = 48°$, $\angle C_1 = 95°$, $\angle B_1 = 48°$?
3. $AB = 10$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 5$ см, $A_1C_1 = 3$ см, $\angle C = \angle C_1 = 90°$?

II уровень

1. Прямая, параллельная стороне MN треугольника MNK, пересекает стороны KM и KN в точках E и F соответственно, $KE = 6$ см, $KN = 10$ см, $KF = 9$ см, $KN = 15$ см. Найдите отношения: а) $EF : MN$; б) $P_{KMN} : P_{KEF}$; в) $S_{KEF} : S_{KMN}$.
2. Точка E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. В каком отношении прямая BE делит диагональ AC параллелограмма? Найдите отношение площади треугольника ABE и четырехугольника $BCDE$.

III уровень

1. Основания трапеции равны 9 и 6 см, а высота равна 10 см. Найдите разность расстояний от точки пересечения диагоналей трапеции до ее оснований.
2. Докажите признак подобия прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Решение задач на готовых чертежах

(Работа проводится самостоятельно.)

1. Рис. 469.
   Найти: $\angle C_1$, B_1C_1.
2. Рис. 470.
   Найти: $\angle C$, $\angle C_1$.
3. Рис. 471.
   Найти: BM.
4. Рис. 472.
   Найти: BC.
5. Рис. 473.
   Найти: $\angle BDA$.
6. Рис. 474.
   Найти AB, NC.

Ответы к задачам:

1. $\angle C_1 = 71°$, $B_1C_1 = 15$ см;
2. $\angle C = \angle C_1 = 60°$;
3. $BM = 6$;
4. $BC = 20/3$;
5. $\angle BDA = 90°$;
6. $AB = 8$, $NC = 8$.

Проверить решения задач по готовым ответам. Заслушать решение задач, с которыми учащиеся не справились. Учащиеся, справившиеся со всеми задачами, решают дополнительные задачи.

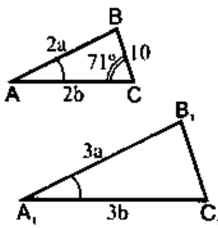


Рис. 469

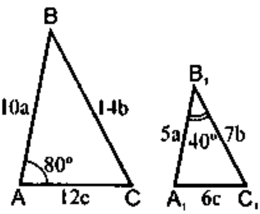


Рис. 470

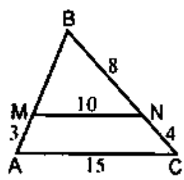


Рис. 471

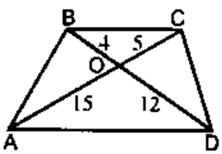


Рис. 472

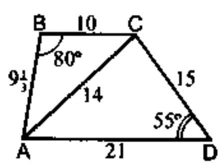


Рис. 473

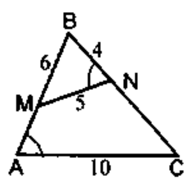


Рис. 474

Дополнительные задачи:

1. Диагональ AC трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) делит ее на два подобных треугольника. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $AC = 15$ см.
(*Ответ*: $S_{ABCD} = 204$ см^2.)
2. Угол B треугольника ABC в два раза больше угла A. Биссектриса угла B делит сторону AC на части $AD = 6$ см и $CD = 3$ см. Найдите стороны треугольника ABC.
(*Ответ*: $AC = 9$ см, $AB = 6\sqrt{3}$ см, $BC = 3\sqrt{3}$ см.)

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Рис. 475. *Доказать*: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
2. Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите BO и отношение площадей треугольников BOC и AOD, $AD = 5$ см, $BC = 2$ см, $AO = 25$ см.

II вариант

1. Рис. 476. *Доказать*: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
2. AB и CD пересекаются в точке O, $AO = 12$ см, $BO = 4$ см, $CO = 30$ см, $DO = 10$ см. Найдите угол CAO, если $\angle DBO = 61°$. Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOD.

II уровень

I вариант

1. Рис. 477. *Доказать*: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC соответственно в точках M и H. Найдите AC и отношение площадей треугольников ABC и BMH, если $MB = 14$ см, $AB = 16$ см, $MH = 28$ см.

II вариант

1. Рис. 478. *Доказать*: $\Delta MBH \sim \Delta CBA$.
2. В треугольнике ABC $AB = 15$ м, $AC = 20$ м, $BC = 32$ м. На стороне AB отложен отрезок $AD = 9$ м, а на стороне AC – отрезок $AE = 12$ м. Найдите DE и отношение площадей треугольников ABC и ADE.

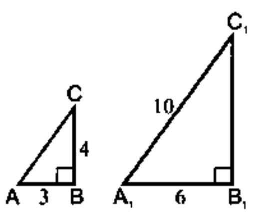


Рис. 475

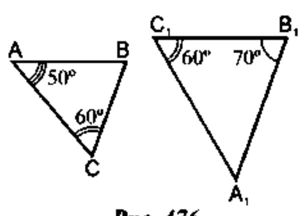


Рис. 476

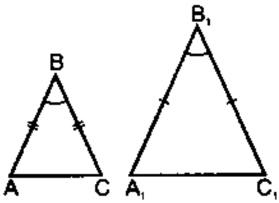


Рис. 477

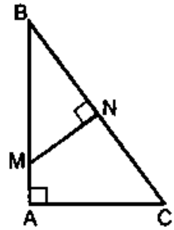


Рис. 478

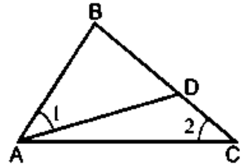


Рис. 479

III уровень

I вариант

1. Рис. 479.
   Дано: $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 4$, $AC = 9$.
   Найти: AB, $S_{ABD} : S_{ABC}$.
2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, $AO \cdot BO = CO \cdot DO$. Докажите, что площади треугольников ACD и ABD равны.

II вариант

1. Рис. 480.
   Дано: $BC \perp AC$, $MH \perp BC$, $2MC = BC$, $MH = 0{,}5\ AC$.
   Доказать: $AB \parallel CH$.
   Найти: $S_{ABD} : S_{MCH}$.
2. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, O – точка пересечения диагоналей, $AO : OC = 3 : 2$. Найдите отношение площадей треугольников ABC и ACD.

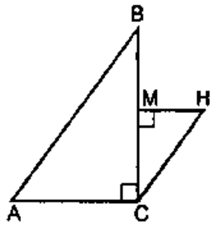


Рис. 480

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Решить задачи № 562, 563, 604, 605.

Урок 37
Решение задач на применение признаков подобия треугольников

Цели урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на применение признаков подобия треугольников.
- Подготовка учащихся к предстоящей контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Анализ ошибок самостоятельной работы

а) Сообщить общие итоги самостоятельной работы.

б) Работа над ошибками.

Объединить учащихся в группы по 3–4 человека в зависимости от того, какой уровень и вариант самостоятельной работы они выполняли. В одной группе должны быть учащиеся, выполнявшие один и тот же уровень и вариант.

Учитель на доске заранее готовит ответы и указания к задачам самостоятельной работы, а в ходе выполнения работы над ошибками оказывает помощь группам при необходимости.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. Вычисли AC и B_1C_1 по теореме Пифагора.
   Найди отношение сторон ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.
2. Рис. 481.
   а) $\Delta BOC \sim \Delta AOD$ по двум углам (каким?).
   б) $BO : AO = BC : AD$, $BO = 10$ см.
   в) $S_{BOC} : S_{AOD} = k^2$, $k = BC : AD = 2 : 5 \Rightarrow k^2 = 4/25 = 0{,}16$.

Ответ: $BO = 10$ см, $S_{BOC} : S_{AOD} = 0{,}16$.

II вариант

1. Вычисли $\angle B$ и $\angle A_1$.
   Определи, по какому признаку $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.
2. Рис. 482.
   а) $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
   б) $\angle CAO = \angle DBO = 61°$.
   в) $S_{AOC} : S_{BOD} = k^2$, $k = AO : BO = 3 \Rightarrow k^2 = 9$.

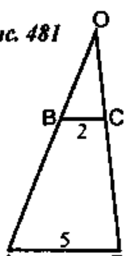
Ответ: $\angle CAO = 61°$, $S_{AOC} : S_{BOD} = 9$.

II уровень

I вариант

1. Используй второй признак подобия треугольников, введи обозначения $AB = BC = x$, $A_1B_1 = B_1C_1 = y$.

Рис. 481



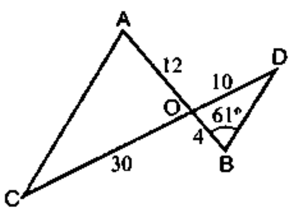


Рис. 482

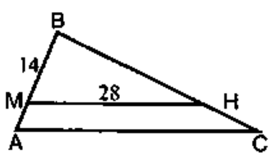


Рис. 483

2. Рис. 483.

а) $\Delta MBH \sim \Delta ABC$ по двум углам (укажи каким).

б) $BM : BA = MH : AC$, $AC = 32$ см.

в) $S_{ABC} : S_{BMH} = k^2$, $k = AB : BM = 16 : 14 = 8/7$, $k^2 = 64/49$.

Ответ: $AC = 32$ см, $S_{ABC} : S_{BMH} = 64 : 49$.

II вариант

1. Используй первый признак подобия треугольников, найди две пары равных углов.

2. Рис. 484.

а) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними (докажи).

б) $AD : AB = DE : BC$, $DE = 19{,}2$ см.

в) $S_{ABC} : S_{ADE} = k^2$, $k = AB : AD = 5 : 3$, $k^2 = 25/9$.

Ответ: $DE = 19{,}2$ см, $S_{ABC} : S_{ADE} = 25 : 9$.

III уровень

I вариант

1. $\Delta\, ABC \sim \Delta ADB$ по двум углам (каким?).

$$AD : AD = AC : AB,\ AB = 6.\ \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Ответ: $AB = 6$, $S_{ABD} : S_{ABC} = 4 : 9$.

2. Рис. 485.

а) $\Delta AOD \sim \Delta COB$ ($\angle BOC = \angle AOD$, $AO : CO = DO : BO$).

б) $BC \parallel AD$, так как $\angle BDA = \angle CBD$.

в) $S_{ACD} = S_{ABD}$, т. к. высоты, проведенные к стороне AD, равны.

II вариант

1. $\Delta ABC \sim \Delta HCM$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними (каким?).

$$\angle ABC = \angle MCH \Rightarrow AB \parallel CH.\ \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}} = k^2 = \left(\frac{BC}{MC}\right)^2 = 4.$$

2. Рис. 486.

а) $\Delta BOC \sim \Delta DOA$ по двум углам $\Rightarrow BC : AD = OC : AO = 2 : 3$.

б) В ΔABC и в ΔACD высоты, проведенные к сторонам BC и AD, равны $\Rightarrow S_{ABC} : S_{ACD} = 2 : 3$.

Ответ: $S_{ABC} : S_{ACD} = 2 : 3$.

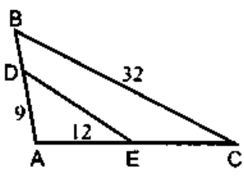


Рис. 484

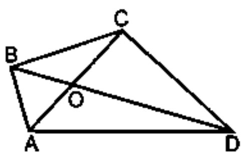


Рис. 485

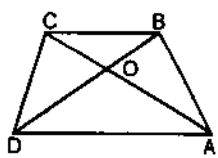


Рис. 486

III. Решение задач

Решить самостоятельно задачи № 1–5. Работу можно организовать в группах по 3–4 ученика, учитель по необходимости оказывает индивидуальную помощь.

Задачи:

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 90°$, а в треугольнике MNK углы M, N, K относятся как 5 : 9 : 4. $AB = 3$ см, $KN = 9$ см.
   Найдите: а) $BC : KM$; б) $S_{ABC} : S_{MNK}$; в) $P_{ABC} : P_{MNK}$.
2. Рис. 487. *Дано*: $MN \parallel AC$, $S_{ABC} : S_{BMN} = 49 : 25$, $MN = 20$ см. *Найти*: AC.
3. В параллелограмме $ABCD$ AE – биссектриса угла A. Стороны параллелограмма AB и BC относятся как 4 : 9. AE пересекает диагональ BD в точке K. Найти отношение $BK : KD$.
4. В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 2 см и 8 см, а диагональ AC равна 4 см. В каком отношении делит диагональ AC площадь трапеции?

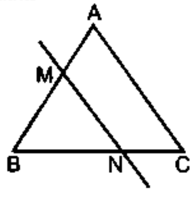


Рис. 487

5. Прямая MN пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и N соответственно так, что $BC = 2MB$, $AB = 2NB$, $MB : NB = 3 : 5$.
   Найдите: а) $P_{ABC} : P_{NBM}$; б) $S_{ABC} : S_{NBM}$; в) $MN : AC$.

Краткое решение задач:

1. $\angle M : \angle N : \angle K = 5 : 9 : 4$, $\angle M + \angle N + \angle K = 180° \Rightarrow$
   $\Rightarrow \angle M = 50°$, $\angle K = 90°$, $\angle N = 40° \Rightarrow$
   $\Rightarrow \angle A = \angle N = 40°$, $\angle B = \angle K = 90° \Rightarrow$
   $\Delta ABC \sim \Delta NKM$ по двум углам $\Rightarrow AB : NK = BC : KM = AC : NM$.
   а) Так как $AB : NK = 3 : 9 = 1 : 3$, то $BC : KM = 1 : 3$;
   б) $S_{ABC} : S_{MNK} = (AB : NK)^2 = 1 : 9$;
   в) $P_{ABC} : P_{MNK} = AB : NK = 1 : 3$.

Ответ: а) 1 : 3; б) 1 : 9; в) 1 : 3.

2. $\Delta ABC \sim \Delta BMN$ по двум углам ($\angle B$ – общий, $\angle BAC = \angle BMN$).

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BMN}} = \frac{49}{25} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = k^2 \Rightarrow k = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN} = \frac{7}{5} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{7 \cdot MN}{5} = 28 \text{ (см)}.$$

Ответ: 28 см.

3. Рис. 488.

Биссектриса $\angle A$ параллелограмма $ABCD$ отсекает от него равнобедренный треугольник ABE, следовательно, $AB = BE$. Так как $AB : BC = 4 : 9$, то $BE : BC = 4 : 9$.

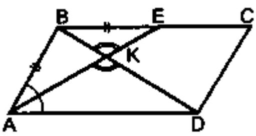


Рис. 488

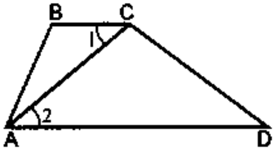


Рис. 489

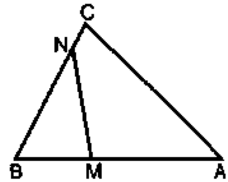


Рис. 490

$BE : AD = 4 : 9$ ($BC = AD$ как противолежащие стороны параллелограмма).

$\Delta AKD \sim \Delta EKB$ по двум углам ($\angle BKE = \angle AKD$, $\angle BEK = \angle KAD$), тогда $BK : KD = BE : AD = 4 : 9$.

Ответ: 4 : 9.

4. Рис. 489.

$\Delta ABC \sim \Delta DCA$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними ($BC : AC = AC : AD = 1 : 2$; $\angle 1 = \angle 2$), отсюда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: 1 : 4.

5. Рис. 490.

$MB : NB = 3 : 5 \Rightarrow BM = 3x$, $NB = 5x$;
$BC = 2MB \Rightarrow BC = 6x$;
$AB = 2NB \Rightarrow AB = 10x$.
$BM : BC = 3x : 6x = 1 : 2$; $BN : BA = 5x : 10x = 1 : 2$,
$\angle MBN = \angle CBA$, таким образом, $\Delta ABC \sim \Delta NBM$.

а) $P_{BMN} : P_{ABC} = 1 : 2$;
б) $S_{ABC} : S_{NBM} = (2 : 1)^2 = 4$;
в) $MN : AC = 1 : 2$.

Ответ: а) 1: 2; б) 4 : 1; в) 1 : 2.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

Решить задачи № 1–3 и дополнительно (по желанию учащихся) задачи № 4–5.

Задачи:

1. Диагонали четырехугольника $ABCD$ AC и BD пересекаются в точке O так, что $OC = 5$ см, $OB = 6$ см, $OA = 15$ см, $OD = 18$ см. Докажите, что в четырехугольнике $ABCD$ $BC \parallel AD$ и найдите отношение треугольников AOD и BOC.

2. Перпендикулярно высоте BD треугольника ABC проведена прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и P соответственно. Найдите AB и отношение площадей треугольников MPB и ABC, если известно, что $BM = 7$ см, $BP = 9$ см, $PC = 18$ см.

3. Прямая EF пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках E и F соответственно так, что $\angle A + \angle EFC = 180°$, а площадь четырехугольника $AEFC$ относится к площади треугольника EBF как 16 : 9. Докажите, что треугольник BFE подобен треугольнику BAC и найдите коэффициент подобия данных треугольников.

4. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является биссектрисой его угла, $BC \cdot BA = BD^2$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BDC$. В каком отношении площадь четырехугольника делится его диагональю BD, если известно, что $DC : AD = 3 : 2$?

5. На стороне AC треугольника ABC отмечена точка K так, что $\Delta ABK \sim \Delta ABC$. Найдите AK, KC, BK, если известно, чт $AB : BC : AC = 3 : 7 : 9$, а периметр треугольника ABC равен 57 см.

Урок 38
Контрольная работа № 3
по теме «Признаки подобия треугольников»

Цели урока:

- Проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Признаки подобия треугольников».

Ход урока

I. Организационный момент

II. Выполнение контрольной работы

Текст контрольной работы (см. приложение) раздать учащимся в распечатанном виде.

III. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился во время Контрольной работы.

В конце урока на доске вывесить ответы и указания к задачам контрольной работы.

Ответы и указания к задачам контрольной работы

I уровень

I вариант

1. $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ по двум углам.
   $AO : BO = CO : DO \Rightarrow OB = 7{,}5$.
   $AC : BD = 2 : 3$.
   $S_{AOC} : S_{BOD} = 4 : 9$.

Ответ: а) 7,5; б) 2 : 3; в) 4 : 9.

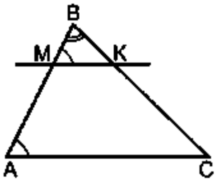


Рис. 491

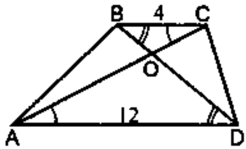


Рис. 492

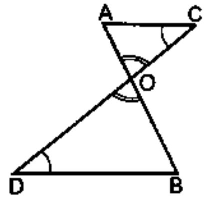


Рис. 493

2. $AB : MK = 1:2$, $BC : KN = 1:2$, $AC : MN = 1:2$.
$\Delta ABC \sim \Delta MKN$.
$\angle M = \angle A = 80°$, $\angle K = \angle B = 60°$. $\angle N = 180° - (\angle M + \angle K) = 40°$.
Ответ: 80°, 60°, 40°.

3. Рис. 491.

а) $\Delta BMK \sim \Delta BAC$ по двум углам $\Rightarrow \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{MK}{AC} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{1}{5}$.

б) $P_{BMK} : P_{ABC} = 1 : 5 \Rightarrow P_{BMK} = 5$ см.
Ответ: 5 см.

4*. Рис. 492.
а) $\Delta BOC \sim \Delta DOA$.
б) $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{BC}{DA} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3} = k$.
в) $\dfrac{S_{BOC}}{S_{DOA}} = k^2 = \dfrac{1}{9} \Rightarrow S_{BOC} = 5$ см^2.

II вариант

1. $\Delta MPE \sim \Delta MNK$ по двум углам.
$MP : MN = ME : MK \Rightarrow MK = 9$.
$PE : NK = 2 : 3$.
$S_{MPE} : S_{MKN} = 4 : 9$.
Ответ: а) 9; б) 2 : 3; в) 4 : 9.

2. $AB : MN = 2$, $BC : NK = 2$, $\angle B = \angle N \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNK$.
$AC : MK = 2 \Rightarrow AC = 14$ см, $\angle C = \angle K = 60°$.
Ответ: $AC = 14$ см, $\angle C = 60°$.

3. Рис. 493.

а) $\Delta ACO \sim \Delta BDO$ по двум углам $\Rightarrow \dfrac{AC}{BD} = \dfrac{CO}{DO} = \dfrac{AO}{BO} = \dfrac{2}{3}$.

б) $P_{ACO} : P_{BDO} = 2 : 3 \Rightarrow P_{ACO} = 14$ см.
Ответ: 14 см.

4*. Рис. 494.
а) $\Delta BOC \sim \Delta DOA$.

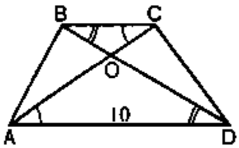


Рис. 494

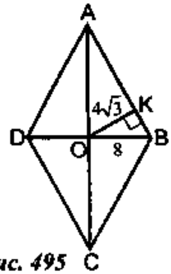


Рис. 495

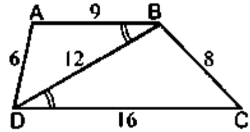


Рис. 496

б) $\dfrac{S_{BOC}}{S_{DOA}}=\dfrac{8}{32}=\dfrac{1}{4}=k^2 \Rightarrow k=0{,}5.$

в) $BC : AD = k = 0{,}5 \Rightarrow BC = 5$ см.

Ответ: 5 см.

II уровень

I вариант

1. $AO : OB = CO : DO = 4 : 3$, $\angle AOC = \angle BOD$, отсюда $\Delta AOC \sim \Delta BOD$ и $\angle OBD = \angle OAC \Rightarrow AC \parallel BD$.

$DB : AC = BO : AO = 3 : 4$. $P_{AOC} : P_{BOD} = 4 : 3$.

$$\frac{S_{DBO}}{S_{AOC}}=\left(\frac{BO}{AO}\right)^2=\frac{9}{16}.$$

Ответ: а) 3 : 4; б) 4 : 3; в) 9 : 16.

2. Рис. 495.

$\Delta AOK \sim \Delta OBK \Rightarrow \dfrac{AO}{OB}=\dfrac{OK}{BK}=\dfrac{AK}{OK}$, то есть $\dfrac{AO}{8}=\dfrac{4\sqrt{3}}{BK}=\dfrac{AK}{4\sqrt{3}}$.

По теореме Пифагора $BK^2 = OB^2 - OK^2 = 16 \Rightarrow BK = 4$ см $\Rightarrow$ $\Rightarrow AO = 8\sqrt{3}$ см, $AC = 16\sqrt{3}$ см, $AB = 16$ см.

Ответ: $AB = 16$ см, $AC = 16\sqrt{3}$.

3. Рис. 496. $\dfrac{AD}{BC}=\dfrac{AB}{DB}=\dfrac{DB}{DC}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BDC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABD = \angle BDC \Rightarrow AB \parallel DC$.

$\angle ADB \neq \angle DBC$, следовательно, AD не параллелен BC. Таким образом, $ABCD$ – трапеция с основаниями AB и DC.

4*. Рис. 497.

$KA : MK = KM : MN = 1 : 2$, $\angle K = \angle NMK \Rightarrow \Delta MNK \sim \Delta KMA$, тогда т. к. $\angle NMK = \angle NKM$, то $\angle MKA = \angle MAK$, т. е. ΔKMA – равнобедренный с основанием AK, следовательно, $AM = MK = 10$ см.

Ответ: 10 см.

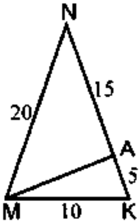


Рис. 497

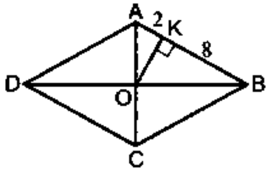


Рис. 498

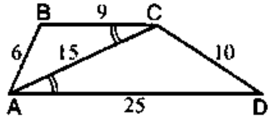


Рис. 499

II вариант

1. $\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{1}{3}$, $\angle B$ – общий, отсюда $\Delta BDE \sim \Delta BAC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BDE = \angle BAC \Rightarrow DE \parallel AC$.
а) $DE : AC = BD : BA = 1 : 3$.
б) $P_{AOC} : P_{DBE} = 3$.
в) $\dfrac{S_{DBE}}{S_{ABC}}=\left(\dfrac{BD}{BA}\right)^2=\dfrac{1}{9}$.

Ответ: а) 1 : 3; б) 3; в) 1 : 9.

2. Рис. 498. $\Delta AOK \sim \Delta OBK \Rightarrow \dfrac{AO}{OB}=\dfrac{OK}{BK}=\dfrac{AK}{OK} \Rightarrow$
$\Rightarrow OK^2 = AK \cdot BK = 16$, то есть $OK = 4$.
По теореме Пифагора $AO^2 = OK^2 + AK^2 = 20 \Rightarrow AO = 2\sqrt{5}$ см, $AC = 4\sqrt{5}$ см.
$OB^2 = OK^2 + KB^2 = 80 \Rightarrow OB = 4\sqrt{5}$ см. $BD = 8\sqrt{5}$.

Ответ: $AC = 4\sqrt{5}$, $BD = 8\sqrt{5}$.

3. Рис. 499.
$\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{AC}{AD} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DCA$,
отсюда $\angle ACB = \angle CAD \Rightarrow BC \parallel AD$.
$\angle BAC \neq \angle ACD \Rightarrow AB$ не параллелен $CD \Rightarrow ABCD$ – трапеция с основаниями BC и AD.

4*. Рис. 500.
$\dfrac{HC}{AC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$, $\angle HCA = \angle BAC \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta CAH$.
Т. к. $\angle BAC = \angle BCA$, то $\angle ACH = \angle AHC$, т. е. ΔCAH – равнобедренный с основанием HC, следовательно, $AH = AC = 20$ см.

Ответ: 20 см.

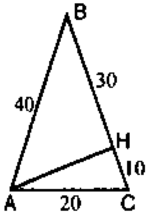


Рис. 500

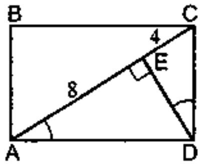


Рис. 501

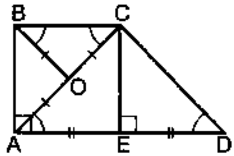


Рис. 502

III уровень

I вариант

1. Рис. 501.

а) $\Delta AED \sim \Delta DEC \Rightarrow AB : BC = CD : AD$;

$EC \quad DE = DE \quad AE \quad \Rightarrow \quad DE = \sqrt{EC \cdot AE} = 4\sqrt{2}$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{EC}{DE} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $AD^2 = AE^2 + ED^2 \Rightarrow AD = 4\sqrt{6}$ см.

$CD^2 = DE^2 + CE^2 \Rightarrow CD = 4\sqrt{3}$ см.

$P_{ABCD} = 8\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ см.

в) $S_{ABCD} = 48\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; б) $8\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)$ см; в) $48\sqrt{2}$ см^2.

2. Рис. 502.

а) ΔBOC и ΔACD – равнобедренные, $\angle CAD = \angle BCO$, отсюда $\angle CDA = \angle CBO \Rightarrow \Delta BOC \sim \Delta DCA$, откуда $BO : CD = BC : AD$, то есть $BO : BC = CD : AD$.

б) O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCE$.

$S_{ACD} = S_{ABCE} = 20$ см^2. $S_{BOA} = S_{ABCE} : 4 = 5$ см^2.

$S_{ABOCD} = S_{ACD} + S_{BOA} = 25$ см^2.

Ответ: 25 см^2.

3. Рис. 503.

$\Delta BCD \sim \Delta DBA \Rightarrow BC : BD = BD : AD \Rightarrow BD = 10$ см.

Ответ: 10 см.

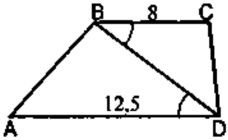


Рис. 503

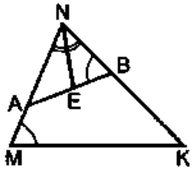


Рис. 504

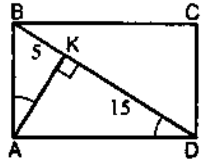


Рис. 505

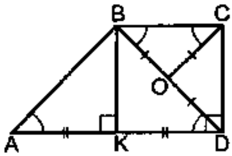


Рис. 506

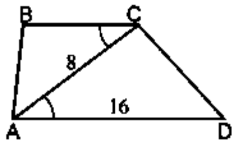


Рис. 507

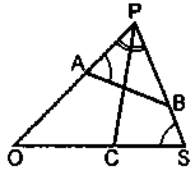


Рис. 508

4*. Рис. 504.

а) NE – биссектриса $\Delta ANB \Rightarrow AN : AE = BN : EB \Rightarrow$
$\Rightarrow AN : BN = AE : EB = 2 : 3.$

б) $\Delta NBA \sim \Delta NMK \Rightarrow NK : NA = NM : NB \Rightarrow$
$\Rightarrow NK : NM = NA : NB = 2 : 3.$

Ответ: 2 : 3.

II вариант

1. Рис. 505. а) $\Delta AKB \sim \Delta DKA \Rightarrow BK : AK = AK : KD$, откуда

$$AK = \sqrt{BK \cdot KD} = 5\sqrt{3}\text{ см} \Rightarrow \frac{BK}{AK} = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AD}{AB} = \frac{AK}{BK} = \sqrt{3}.$$

б) $AB^2 = BK^2 + AK^2 \Rightarrow AB = 10$ см.

$AD^2 = AK^2 + KD^2 \Rightarrow AD = 10\sqrt{3}$ см. $P_{ABCD} = 20(\sqrt{3}+1)$ см.

в) $S_{ABCD} = 100\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) $20(\sqrt{3}+1)$ см; в) $100\sqrt{3}$ см^2.

2. Рис. 506.

а) ΔABD и ΔCOB – равнобедренные, $\angle BDA = \angle OBC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BAD = \angle OCB \Rightarrow \Delta COB \sim \Delta ABD$, откуда $BC : AD = BO : AB$, то есть $AB : AD = BO : BC$.

б) O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $KBCD$.
$S_{ABOCD} = S_{ABD} + S_{OCD}$. $S_{OCD} = S_{KBCD} : 4$, $S_{ABD} = S_{KBCD}$.
$S_{ABOCD} = S_{KBCD} \cdot 5 : 4 \Rightarrow S_{KBCD} = 24$ см^2.

Ответ: 24 см^2.

3. Рис. 507.

$\Delta ABC \sim \Delta DCA \Rightarrow BC : CA = CA : AD \Rightarrow BC = 4$ см.

Ответ: 4 см.

4*. Рис. 508.

а) PC – биссектриса $\Delta OPS \Rightarrow PO : OC = SP : SC \Rightarrow$
$\Rightarrow PO : SP = OC : SC = 4 : 3.$

б) $\Delta OPS \sim \Delta BPA \Rightarrow PB : OP = PA : PS \Rightarrow$
$\Rightarrow PB : PA = OP : PS = 4 : 3.$

Ответ: 4 : 3.

Урок 39
Средняя линия треугольника

Цели урока:

- Рассмотреть теорему о средней линии треугольника и свойство медиан треугольника, показать их применение в процессе решения задач.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение теории подобных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Анализ ошибок контрольной работы

а) Сообщить общий результат выполненной работы.

б) Обсудить идею решения задач, с которыми не справились большинство учащихся.

в) Предложить выполнить работу над ошибками самостоятельно дома. При необходимости можно разрешить пользоваться ответами и указаниями к контрольной работе № 3 (см. урок № 38).

III. Подготовка к восприятию нового материала

Повторение теоретического материала в процессе решения задач по готовым чертежам.

1. Рис. 509. $CD = 4$, $AD = 8$, $CE = 5$, $BE = 10$.
   Доказать:
   а) $\Delta CDE \sim \Delta CAB$;
   б) $AB \parallel DE$.
2. Рис. 510. $ABCD$ – трапеция.
   Доказать:
   а) $BO : OD = CO : OA$;
   б) $DO : BO = 2$, если $BC = AD/2$.

IV. Изучение нового материала

1. Ввести определение средней линии треугольника.

Определение: Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

На доске и в тетрадях учащихся рисуиок (рис. 511) и запись:

Если $AM = MB$ и $CN = NB$, то MN – средняя линия ΔABC.

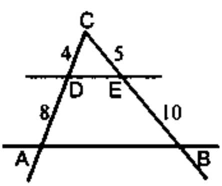


Рис. 509

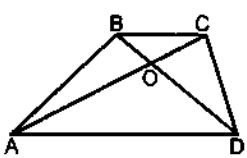


Рис. 510

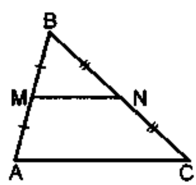


Рис. 511

2. Творческое задание

– Исследуйте, какими свойствами обладает средняя линия треугольника.

(Работа осуществляется в группах с последующим обсуждением решения задания.)

3. Оформление теоремы о средней линии треугольника с доказательством на доске и в тетрадях учащихся.

Теорема: Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Дано: ΔABC, MN – средняя линия (рис. 512).
Доказать: $MN \parallel AC$, $MN = AC : 2$.
Доказательство:

а) $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ ($BM : BA = BN : NC = 1 : 2$, $\angle B$ – общий).

б) $\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow MN \parallel AC$.

в) $MN : AC = BM : BA = 1 : 2 \Rightarrow MN = AC : 2$.

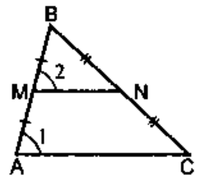


Рис. 512

4. Решить устно задачи № 564, 565 учебника, выполнив на доске рисунки заранее.

5. Творческое задание (разбить учащихся в группы по 3–4 человека).

Задача (№ 1, с. 146 учебника)

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Указания для решения задачи:

1) Постройте две медианы треугольника и докажите, что точка пересечения делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины;
2) Постройте третью медиану и докажите, что она проходит через точку пересечения первых двух и делится этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Наводящие вопросы:

– Соедините точки A_1 и B_1 отрезком. Что вы можете сказать о треугольниках AOB и A_1OB_1?
– Почему медианы CC_1 и BB_1 также пересекаются в точке O?

Итак, это свойство называют свойством медиан треугольника, оно широко используется при решении задач.

6. Решить устно задачу с целью закрепления свойства медиан треугольника:

В треугольнике ABC медианы AA_1, BB_1 и CC_1, равные соответственно 6 см, 9 см и 12 см, пересекаются в точке O.

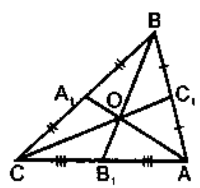


Рис. 513

Найти $AO + OB + CO$.

При решении использовать рис. 513.

V. Работа в рабочих тетрадях

Решить самостоятельно задачи № 61, 62. Учитель при необходимости оказывает индивидуальную помощь менее подготовленным ученикам.

Дополнительные задачи («Дидактические материалы по геометрии», авт. Зив Б. Г., Мейлер В. М. – М.: Просвещение, 1992.)

С. – 19 (с. 25, III вариант).

VI. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 62, вопросы 8, 9;

Решить задачу № 63 из рабочей тетради, задачи № 556, 570, 571.

Дополнительная задача:

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медиана BB_1 равна 10 см. Найдите медианы AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$ см.

(*Ответ*: $AA_1 = 4\sqrt{10}$ см, $CC_1 = 2\sqrt{13}$.)

Урок 40
Средняя линия треугольника. Свойство медиан треугольника

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы о средней линии треугольника и свойства медиан треугольника.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Два ученика вызываются к доске для доказательства теорем, еще два – для оформления решений домашних задач. В это время идет решение задач на готовых чертежах в двух уровнях.

Теоретический опрос

– Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.
– Сформулируйте и докажите свойство медиан треугольника.

Проверка домашнего задания

Проверить решение задач № 570, 571.

Решение задач на готовых чертежах

I уровень – устно с обсуждением решений.

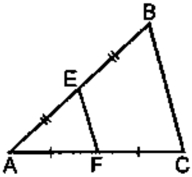


Рис. 514

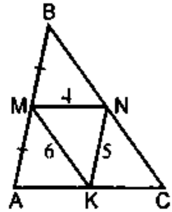


Рис. 515

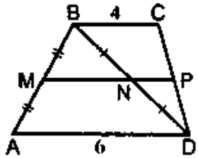


Рис. 516

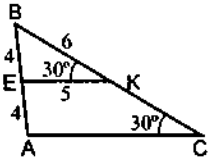


Рис. 517

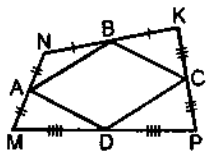


Рис. 518

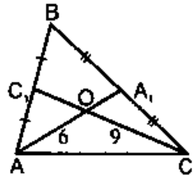


Рис. 519

1. Рис. 514.
Найти: а) EF, если $BC = 10{,}6$; б) BC, если $EF = 4{,}2$.

2. Рис. 515. $MN \parallel AC$, $MK \parallel BC$.
Найти P_{ABC}.

3. Рис. 516. $ABCD$ – трапеция.
Найти: MP.

4. Рис. 517.
Найти: BC, AC.

5. Рис. 518.
Доказать: $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$, $ABCD$ – параллелограмм.

6. Рис. 519.
Найти: C_1O, A_1O.

II уровень – письменно с последующей проверкой по готовым ответам.

1. Рис. 520.
Найти: MK.

2. Рис. 521.
Найти: KL.

3. Рис. 522.
Найти: MF.

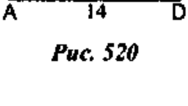


Рис. 520

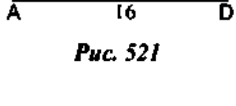


Рис. 521

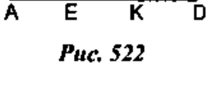


Рис. 522

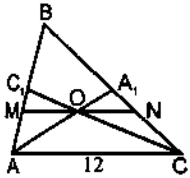


Рис. 523

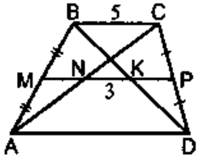


Рис. 524

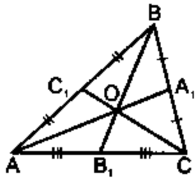


Рис. 525

4. Рис. 523. O – точка пересечения медиан, $MN \parallel AC$.
   Найти: MN.
5. Рис. 524.
   Найти: AD.
6. Рис. 525. $S_{ABC} = 369$ см^2.
   Найти: а) S_{ABB_1}; б) S_{AOC}; в) S_{AOB_1}.

Ответы к задачам II уровня:

1. $MK = 12$;	2. $KL = 5$;
3. $MF = 4$;	4. $MN = 8$;
5. $AD - 11$;	6. а) $S_{ABB_1} = 15$ см^2, б) $S_{AOC} = 12$ см^2.

III. Решение задач

1. Работа в рабочих тетрадях – решить задачу № 66 (стр. 30).

Учащиеся работают самостоятельно, затем один из них читает свое решение, остальные проверяют правильность своего решения, исправляют ошибки свои и ошибки отвечающего при их наличии.

2. Решить задачи № 1, 2 («Дидактические материалы по геометрии 8 класс», авт. Зив Б. Г., Мейлер В. М.), С–19. – С. 35.

Задачи решаются самостоятельно, два ученика решают их у доски, по окончании работы идет обсуждение правильности решения.

Задача С–19 (№ 1, с. 35)

Решение (рис. 526):

Так как BP и AQ равны и лежат на параллельных прямых, $ABPQ$ – параллелограмм, E – точка пересечения его диагоналей $\Rightarrow BE = EQ$, т. е. E – середина BQ.

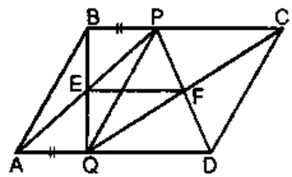


Рис. 526

$QPCD$ – параллелограмм, так как $AB \parallel D$, $AB = CD$, $AB \parallel PQ$, $AB = PQ$. Тогда $PQ = CD$, $PQ \parallel CD$, следовательно, F – точка пересечения диагоналей параллелограмма, т. е. $QF = FC$, F – середина QC.

В треугольнике BQC E – середина BQ, F – середина QC. Т. е. EF – средняя линия треугольника $\Rightarrow EF \parallel BC$, $EF = 1/2BC$.

Задача С–19 (№ 2, с. 35)

Решение (рис. 527):

Медианы треугольника пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины, т. е. $BO : OB_1 = 2 : 1$.

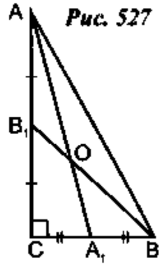


Рис. 527

Так как $BO = 10$ см, то $OB_1 = 5$ см.

Тогда $BB_1 = 15$ см.

В прямоугольном треугольнике BB_1C по теореме Пифагора:

$B_1C^2 = BB_1^2 - BC^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow B_1C = 12$ см.

Т. к. BB_1 – медиана, то $AC = B_1C \cdot 2 = 24$ (см),

$S_{ABC} = AC \cdot CB : 2 = 24 \cdot 9 : 2 = 108$ (см^2).

Ответ: 108 см^2.

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. E и F – середины сторон AB и BC треугольника ABC. Найдите EF и $\angle BEF$, если $AC = 14$ см, $\angle A = 72°$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Найдите расстояние от точки O до вершины B данного треугольника, если $AB = AC = 13$ см, $BC = 10$ см.

II вариант

1. M и N – середина сторон AC и CB треугольника ABC. Найдите AB и $\angle B$, если $MN = 8$ см, $\angle CNM = 46°$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC O – точка пересечения медиан. Найдите расстояние от точки O до вершины A данного треугольника, если $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см.

II уровень

I вариант

1. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, E и F – середины сторон AB и BC, $OE = 4$ см, $OF = 5$ см. Найдите периметр $ABCD$.
2. Вычислите медианы треугольника со сторонами 25 см, 25 см, 14 см.

II варианты

1. $ABCD$ – параллелограмм с периметром 28 см, O – точка пересечения диагоналей. Найдите расстояние от точки O до середины CD, если расстояние от точки O до середины BC равно 3 см.
2. Вычислите медианы треугольника со сторонами 13 см, 13 см, 10 см.

III уровень

I вариант

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 30°$, $AD = 16$ см, M – середина BC. AM пересекает BD в точке N, CN пересекает AB в точке P, $AP = 6$ см. Найдите площадь параллелограмма.
2. В треугольнике со сторонами 15 см, 15 см и 24 см найдите расстояние от точки пересечения медиан до сторон треугольника.

II вариант

1. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 10$ см, E – середина CD. BE пересекает AC в точке P, DP пересекает BC в точке K, $BK = 7$ см. Найдите площадь параллелограмма.
2. Расстояния от точки пересечения медиан равнобедренного треугольника до сторон равны 8 см, 8 см и 5 см. Найдите стороны треугольника.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Решить задачи № 568, 569 учебника, задачи № 64, 65 из рабочей тетради.

Дополнительные задачи: С–19 (№ 1, № 2) из сб. «Дидактические материалы по геометрии 8 класс» авторов Зив Б. Г., Мейлер В. Г. (с. 55, вариант 6).

Урок 41
Пропорциональные отрезки

Цели урока:

- Ввести понятия среднего пропорционального (среднего геометрического) двух отрезков.
- Рассмотреть задачу о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике: свойство высоты прямоугольного треугольника, проведенной из вершины прямого угла.
- Сформировать у учащихся навыки использования изученной темы в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

а) Проверка задач № 64, 65 рабочей тетради (устно).

б) Решение задач на готовых чертежах с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала (фронтальная работа с классом).

1. Рис. 528. *Дано*: $\angle B = 90°$, $\angle C = 35°$.
   Доказать:
   а) $\Delta ABD \sim \Delta BCD$;
   б) $\Delta ABD \sim \Delta ACB$.
2. Рис. 529. *Дано*: $\angle B = 90°$.
   Найти: BD.
3. *Дано*: $\angle B = 90°$.
   Найти: AB, BC.

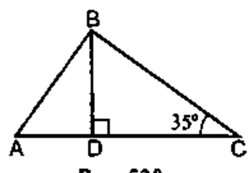


Рис. 528

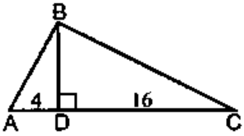


Рис. 529

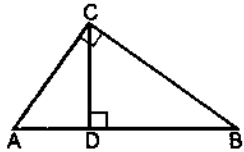


Рис. 530

III. Изучение нового материала

Среднее геометрическое двух отрезков

Ввести понятие среднего пропорционального (среднего геометрического) двух отрезков.

> ***Определение***: Отрезок XY называется средним пропорциональным (средним геометрическим) для отрезков AB и CD, если $XY = \sqrt{AB \cdot CD}$.

Запись на доске и в тетрадях учащихся:

$XY = \sqrt{AB \cdot CD}$, XY – среднее пропорциональное (среднее геометрическое) для отрезков AB и CD.

Решить устно задачи:

1. Найти длину среднего пропорционального отрезков MN и KP, если $MN = 9$ см, $KP = 16$ см.
2. Среднее пропорциональное отрезков AB и CD равно 10, а разность их длин равна 21. Найти длины отрезков AB и CD.

Творческое задание по группам

Задача № 2 (с. 147, п. 63 учебника), утверждения 1° и 2° (с. 148, п. 63).

I группа: доказать, что высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному треугольнику.

II группа: доказать, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

Данные задачи желательно дать группам на отдельных карточках для обеспечения максимально самостоятельного подхода к решению задач.

Обсуждение решений задач

На доске и в тетрадях записать:

Если в ΔABC $\angle C = 90°$, CD – высота (рис. 530), то:

а) $\Delta ABC \sim \Delta ACD$; $\Delta ABC \sim \Delta CBD$;
$\Delta ACD \sim \Delta CBD$.

б) $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$.

в) $AC = \sqrt{AB \cdot AD}$; $CB = \sqrt{AB \cdot BD}$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 67, 68 (стр. 31) самостоятельно с последующим обсуждением.

2. Решить самостоятельно задачи: № 572 б), г), 574 а).

В ходе решения задач № 572–574 достаточно начертить общий рисунок.

Задача № 572 (б)

Решение (рис. 531):

$$b_c = 36,\ a_c = 64.\quad h = \sqrt{a_c \cdot b_c} = \sqrt{64 \cdot 36} = 48.$$

$$a = \sqrt{h^2 + a_c^2} = \sqrt{48^2 + 64^2} = 80.$$

$$b = \sqrt{h^2 + b_c^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60.$$

Ответ: $h = 48$, $a = 80$, $b = 60$.

Задача № 572 (г)

Решение (рис. 531):

$$a = 8,\ a_c = 4 \Rightarrow a = \sqrt{a_c \cdot c} \Rightarrow 8 = \sqrt{4 \cdot c} \Rightarrow \sqrt{c} = 4,\ c = 16.$$

$$b = c^2 - a^2 = 16^2 - 8^2 = 8\sqrt{3}.$$

$$b = \sqrt{b_c \cdot c} \Rightarrow 8\sqrt{3} = \sqrt{b_c \cdot 16} \Rightarrow \sqrt{b_c} = 2\sqrt{3} \Rightarrow b_c = 12.$$

Ответ: $b = 8\sqrt{3},\ c = 16,\ b_c = 12.$

Задача № 574 (а)

Решение (рис. 531):

$$\Delta ACD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \frac{a \cdot b}{c}.$$

Дополнительные задачи

С–20 (№ 1, 2) из сборника: Зив Б. Г., Мейлер В. Г. Дидактические материалы по геометрии. – С. 25.

Задача С–20 (№ 1, с. 25)

Краткое решение (рис. 532):

$$\Delta BDE \sim \Delta DCE \text{ по двум углам } \frac{BD}{DC} = \frac{2}{1} = k \Rightarrow \frac{S_{BDE}}{S_{DCE}} = \frac{4}{1}.$$

$$S_{DCE} = 20\text{см}^2 \Rightarrow S_{BDE} = 80\ \text{см}^2.$$

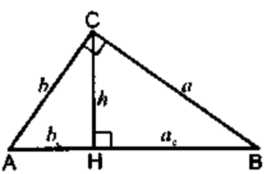


Рис. 531

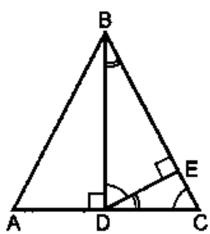


Рис. 532

$S_{BDC} = S_{DCE} + S_{BDE} = 100$ (см^2).

$\Delta ABD = \Delta CBD \Rightarrow S_{ABD} = S_{CBD} = 100$ см$^2 \Rightarrow S_{ABC} = 200$ см^2.

Ответ: 200 см^2.

Задача С–20 (№ 2, с. 25)

Краткое решение (рис. 533):

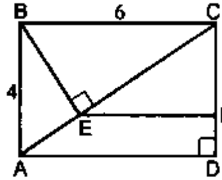


Рис. 533

ΔABC – прямоугольный, следовательно,

$AC = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

$BE \perp AC \Rightarrow AB = \sqrt{AE \cdot AC} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{AE} = \frac{AB}{\sqrt{AC}} = \frac{4}{\sqrt{\sqrt{52}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ AE = \frac{16}{\sqrt{52}} = \frac{8}{\sqrt{13}} \Rightarrow CE = 2\sqrt{13} - \frac{8\sqrt{13}}{13} = \frac{18\sqrt{13}}{13}.$$

$$\Delta ACD \sim \Delta ECF \Rightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{AD}{EF}.$$

Тогда $EF = \dfrac{EC \cdot AD}{AC} = \dfrac{\frac{18\sqrt{13}}{13} \cdot 6}{2\sqrt{13}} = \dfrac{54}{13} = 4\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $4\dfrac{2}{3}$.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 63, вопросы 10–11;

Решить задачи № 572 а), в), д), 573, 574 (б);

Выполнить работу над ошибками, используя готовые ответы и указания к задачам самостоятельной работы (см. урок № 40).

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. $EF = 7$ см, $\angle BEF = 72°$.

2. Рис. 534. $AA_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $AO : OA_1 = 2 : 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow AO = 8$, $OA_1 = 4$, $OB = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

Ответ: $OB = \sqrt{41}$.

II вариант

1. $AB = 16$ см, $\angle B = 46°$.

2. Рис. 535. $BB_1 = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$, $BO : OB_1 = 2 : 1 \Rightarrow OB_1 = 2$.

$AO = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$.

Ответ: $2\sqrt{17}$.

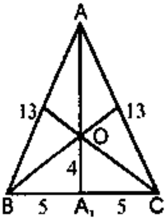


Рис. 534

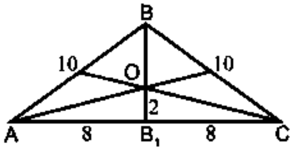


Рис. 535

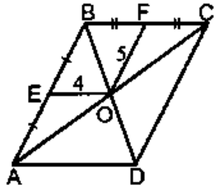


Рис. 536

II уровень

I вариант

1. Рис. 536.

   EO и OF – средняя линия, $\Delta ABC \Rightarrow BC = 8$ см, $AB = 10$ см.

   $P_{ABCD} = 36$ см.

Ответ: 36 см.

2. Рис. 537.

   $BB_1 = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ см.

   $OB_1 = 8$ см $\Rightarrow AO = \sqrt{7^2 + 8^2} = \sqrt{113}$ см.

   $AA_1 = CC_1 = \dfrac{3}{2}\sqrt{113}$ см.

Ответ: 24 см, $\sqrt{113}$ см, $\dfrac{3}{2}\sqrt{113}$ см.

II вариант

1. Рис. 538.

   OM и ON – средние линии $\Delta BCD \Rightarrow CD = 6$ см, $BC = 2 \cdot ON \Rightarrow$
   $P_{ABCD} = 2 \cdot (CD + BC) = 2 \cdot (6 + 2 \cdot ON) = 28$, откуда $ON = 4$ см.

Ответ: 4 см.

2. Рис. 539.

   $BB_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $OB_1 = 4$ см.

   $AO = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$ см, $AA_1 = CC_1 = 1{,}5\sqrt{41}$ см.

Ответ: 12 см, $\sqrt{41}$ см, $1{,}5\sqrt{41}$ см.

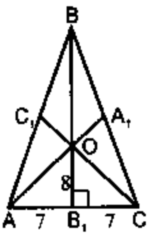


Рис. 537

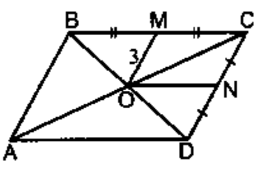


Рис. 538

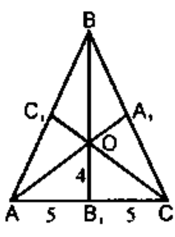


Рис. 539

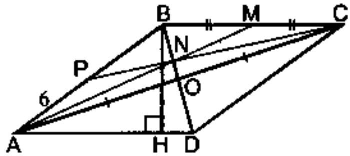


Рис. 540

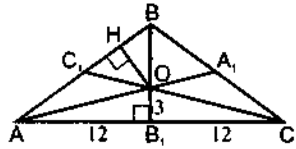


Рис. 541

III уровень

I вариант

1. Рис. 540.

N – точка пересечения медиан $\Delta ABC \Rightarrow AP = PB = 6$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 12$ см, $BH = 6$ см $\Rightarrow S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16 \cdot 6 = 96$ см^2.

Ответ: 96 см^2.

2. Рис. 541.

$BB_1 = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ см $\Rightarrow$

$OB_1 = 3$ см, $OB = 6$ см, $AO = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$ см.

$AB = 15$ см $\Rightarrow$ если $AH = x$, то $BH = 15 - x$, тогда

$OH^2 = AO^2 - AH^2 = OB^2 - BH^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 153 - x^2 = 36 - (15 - x)^2$, $x = 11{,}4 \Rightarrow AH = 11{,}4$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow OH = \sqrt{153 - 11{,}4^2} = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ см.

Ответ: 3 см, 4,8 см, 4,8 см.

II вариант

1. Рис. 542.

P – точка пересечения медиан $\Delta BCD \Rightarrow BK = KC = 7$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = AD = 14$ см.

$AH = AB/2 = 5$ см $\Rightarrow BH = 5\sqrt{3}$ см. $S_{ABCD} = AD \cdot BH = 70\sqrt{3}$ см^2.

Ответ: $70\sqrt{3}$ см^2.

2. Рис. 543.

$OB_1 = 5$ см $\Rightarrow OB = 10$ см $\Rightarrow HB = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ см.

$\Delta ABB_1 \sim \Delta OBH \Rightarrow AB : OB = BB_1 : BH \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = 10 \cdot 15 : 6 = 25$ см.

$AB_1 = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ см $\Rightarrow AC = 40$ см.

Ответ: 25 см, 25 см, 40 см.

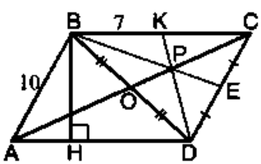


Рис. 542

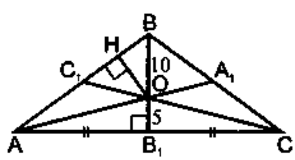


Рис. 543

Урок 42
Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач на применение теории подобных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Подготовить у доски доказательства следующих свойств прямоугольного треугольника:

1) Высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному.
2) Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой.
3) Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное для гипотенузы и отрезка гипотенузы, заключенного между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.

Пока у доски учащиеся готовят доказательства свойств прямоугольных треугольников, 3–6 учащихся работают по индивидуальным карточкам, а остальные учащиеся решают задачи на готовых чертежах.

Работа по индивидуальным карточкам

I уровень (карточка № 1)

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD – высота треугольника, $AC = 5$ см, $CB = 10$ см. Найдите отношение площадей треугольников ACD и CDB.
2. В параллелограмме $ABCD$ $BD \perp AB$, $BE \perp AD$, $BE = 6$ см, $AE = 3$ см. Найдите площадь параллелограмма.

II уровень (карточка № 2)

1. Диагонали ромба пересекаются в точке O, $AC : BD = 3 : 2$, $OE \perp AB$. Площадь треугольника AOE равна 27 см^2. Найдите площадь ромба.
2. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = CB$, BD – биссектриса, $DE \perp AB$, $AE : BE = 4 : 9$, $BD + AC = 14$. Найдите периметр треугольника ABC.

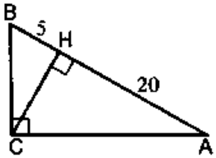


Рис. 544

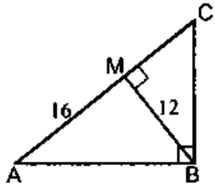


Рис. 545

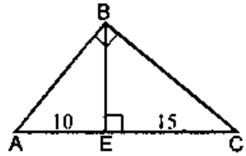


Рис. 546

III уровень (карточка № 3)

1. В прямоугольнике $ABCD$ $BE \perp AC$, $AE : CE = 1 : 3$. Найдите углы, которые образует диагональ со сторонами прямоугольника.
2. В трапеции $ABCD$ AD и BC – основания, $BE \perp AD$, $BC : AD = 1 : 2$, $BE : DE = 3 : 4$. Площадь треугольника ABE равна 18 см^2. Найдите площадь трапеции.

Решение задач по готовым чертежам

Работа проводится с целью повторения изученных на предыдущем уроке формул.

1. Рис. 544.
   Найти: CH.
2. Рис. 545.
   Найти: MC.
3. Рис. 546.
   Найти: AB, BC.
4. Рис. 547. *Найти*: x; y; z.

Заслушать доказательство теорем.

III. Решение задач

1. В тетрадях и у доски решить задачу № 576.

Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 576

Решение (рис. 548):

Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда $AC = 5x$, $BC = 6x$.

Из ΔACD ($\angle D = 90°$) по теореме Пифагора:
$AD^2 = AC^2 - CD^2 = 25x^2 - CD^2$.

Из ΔBCD ($\angle D = 90°$) по теореме Пифагора:
$BD^2 = CB^2 - CD^2 = 36x^2 - CD^2$.

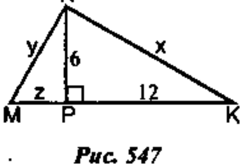


Рис. 547

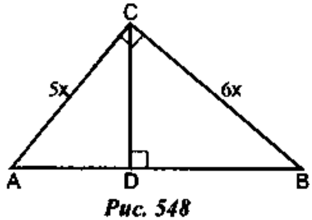


Рис. 548

$BD^2 - AD^2 = (36x^2 - CD^2) - (25x^2 - CD^2) = 11x^2$.

$BD^2 - AD^2 = (BD - AD)(BD + AD) = 11 \cdot AB$, так как BD на 11 см больше AD, $BD + AD = AB$.

$11x^2 = 11 \cdot AB \Rightarrow AB = x^2$.

Из ΔABC ($\angle C = 90°$) по теореме Пифагора

$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 25x^2 + 36x^2 = 61x^2 \Rightarrow$

$AB = x\sqrt{61} \Rightarrow x^2 = x\sqrt{61}$; $x = \sqrt{61}$; $AB = 61$ см.

Ответ: 61 см.

Наводящие вопросы:

– Пусть x – коэффициент пропорциональности. Чему равны катеты AC и BC?

– Как можно выразить через x AB?

– Чему равно AB?

2. Решить самостоятельно задачу № 69 из рабочей тетради (с. 32).

Учитель оказывает индивидуальную помощь менее подготовленным учащимся.

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

Рис. 549.

Найти: а) CH, AC, BC. б) $S_{ACH} : S_{BCH}$.

II вариант

Рис. 550.

Найти: а) BH, AB, BC. б) $S_{ABH} : S_{CBH}$.

II уровень

I вариант

Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, равна 6 см и делит гипотенузу на отрезки, один из которых больше другого на 5 см. Найдите стороны треугольника. В каком отношении данная высота делит площадь треугольника?

II вариант

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена высота CD так, что длина отрезка BD на 4 см больше длины отрезка CD, $AD = 9$ см. Найдите стороны треугольника ABC. В каком отношении CD делит площадь треугольника ABC?

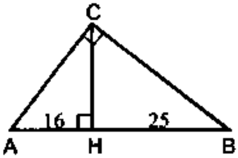


Рис. 549

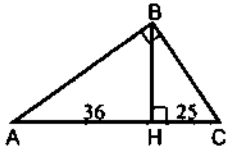


Рис. 550

III уровень

I вариант

В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CH так, что $AC = 2$ см, $BH = 3$ см. Найдите CB, CH, AH. В каком отношении CH делит площадь треугольника ABC?

II вариант

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота BK так, что $AK = 5$ см, $BC = \sqrt{6}$ см. Найдите BK, KC, AB. В каком отношении BK делит площадь треугольника ABC?

Дополнительная задача

Биссектриса острого угла CDA трапеции $ABCD$ пересекает сторону AB в точке K. Из точки K проведен перпендикуляр KE к стороне CD так, что $CE = 9$ см, $DE = 16$ см.

Найдите KE и стороны трапеции, если $\angle A = 90°$, K – середина AB.

Ответ: $KE = 12$ см, $AB = 24$ см, $BC = 9$ см, $CD = 25$ см, $AD = 16$ см.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Решить задачи № 575, 577, 579, 578 (устно).

Урок 43
Измерительные работы на местности

Цель урока:

- Показать применение подобия треугольников в измерительных работах на местности.
- Совершенствовать навыки решения задач на применение теории подобных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Анализ ошибок самостоятельной работы

а) Общий анализ самостоятельной работы.

б) Работа над ошибками.

Выписать на доске ответы и указания к задачам самостоятельной работы, предложить учащимся найти свои ошибки и исправить их. Учитель оказывает индивидуальную помощь по необходимости.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

а) $CH = \sqrt{AH \cdot BH} = 20$. $AC = \sqrt{AH \cdot AB} = 4\sqrt{41}$

$BC = \sqrt{BH \cdot AB} = 5\sqrt{41}$.

б) $S_{ACH} : S_{BCH} = 16 : 25$.

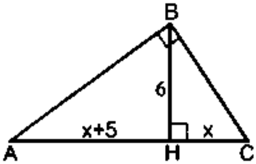


Рис. 551

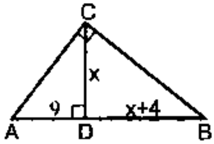


Рис. 552

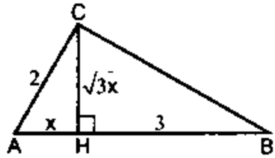


Рис. 553

II вариант

а) $BH = \sqrt{AH \cdot BH} = 30$. $AB = \sqrt{AH \cdot AC} = 6\sqrt{61}$.

$BC = \sqrt{CH \cdot AC} = 5\sqrt{61}$.

б) $S_{ABH} : S_{CBH} = 36 : 25$.

II уровень

I вариант

Рис. 551. $\sqrt{x \cdot (x+5)} = 6 \Rightarrow x = 4$.

$AC = 13$ см; $AB = 3\sqrt{13}$ см; $BC = 2\sqrt{13}$ см; $S_{ABH} : S_{BCH} = 9 : 4$.

II вариант

Рис. 552. $\sqrt{9 \cdot (x+)} = x \Rightarrow x = 12$.

$AB = 25$ см; $AC = 15$ см; $BC = 20$ см; $S_{ACD} : S_{BCD} = 9 : 16$.

III уровень

I вариант

Рис. 553. $x^2 + \sqrt{3 \cdot x^2} = 2^2 \Rightarrow x = 1$.

$CH = \sqrt{3}$ см, $CB = 2\sqrt{3}$ см, $AH = 1$ см. $S_{ACH} : S_{BCH} = 1 : 3$.

II вариант

$x^2 + \sqrt{5 \cdot x^2} = \sqrt{6^2} \Rightarrow x = 1$.

$KC = 1$ см, $BK = 5$ см, $AB = \sqrt{30}$ см. $S_{ABK} : S_{CBK} = 5 : 1$.

III. Проверка домашнего задания

Доказать теорему Пифагора с помощью теорем о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике. Один из более подготовленных учащихся готовится у доски, его ответ заслушивается классом после проверки домашией задачи № 579.

Задача № 579

Решение (рис. 554):

$\Delta BAC \sim \Delta BA_1C_1$ по двум углам ($\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = 90°$, $\angle B = 90°$).

Тогда $\dfrac{BC}{BC_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow A_1C_1 = \dfrac{BC_1 \cdot AC}{BC} = 3{,}15(\text{м})$.

Ответ: 3,15 м.

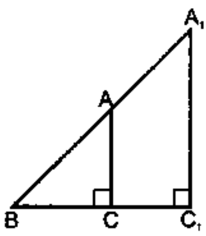


Рис. 554

Наводящие вопросы:
- Что вы можете сказать о треугольниках BAC и BA_1C_1?
- Что можно сказать о сторонах этих треугольников?
- Пропорциональность каких сторон используется для нахождения отрезка A_1C_1?

IV. Изучение нового материала

Прочитать самостоятельно на с. 151 учебника текст «Определение расстояния до недоступной точки».

Используя задачу № 583 и рис. 204 (с. 155 учебника) составить план действий для определения ширины реки.

Возможный план:
1) На местности выбрать точку A и точку B_1 на берегу реки так, чтобы AB_1 было перпендикулярно берегу. B – точка на противоположном берегу.
2) На берегу реки выбрать точку C, отличную от B_1.
3) Измерить углы B_1AC и ACB.
4) На листе бумаги выполнить рисунок в некотором масштабе и провести прямую B_1C_1 параллельно B_1B.
5) Вычислить AB, а затем B_1B.
$AB : AC = AB_1 : AC_1 \Rightarrow AB = AC \cdot AB_1 : AC_1$, $B_1B = AB - AB_1$.

Решить задачу № 583 с учетом ее данных.

V. Решение задач

1. Решить задачу № 582.

Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 582

$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ (по построению).

Тогда $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \Rightarrow AB = \dfrac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{4200 \cdot 7,2}{6,3} = 48$ (м).

Ответ: 48 м.

2. Решить самостоятельно задачи (Зив Б. Г., Меймер В. М. Дидактические материалы по геометрии.)

I уровень: С–20 (II вариант, с. 16).

II уровень: С–20 (IV вариант, с. 36).

Задача С–20 (№ 1, II вариант, с. 16)

Решение (рис. 555):

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$ по двум углам.

Тогда: $k = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{S_{ACD}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$.

Ответ: 4 : 9.

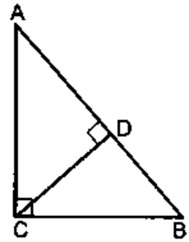


Рис. 555

Задача С–20 (№ 2, II вариант, с. 16)

Решение (рис. 556):

Из ΔBCD по теореме Пифагора:

$BD = \sqrt{CB^2 + CD^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45}.$

$\Delta BCD \sim \Delta DBA$ по двум углам. Тогда:

$$\frac{BC}{DB} = \frac{CD}{BA} = \frac{BD}{DA} \Rightarrow \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{6}{BA} \Rightarrow BA = \frac{3\sqrt{5}\cdot 6}{3} = 6\sqrt{5}.$$

$$S_{DBA} = \frac{1}{2} DB \cdot BA = \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 6\sqrt{5} = 45.$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} CB \cdot CD = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 6 = 9.$$

$$S_{ABCD} = S_{DBA} + S_{BDC} = 45 + 9 = 54.$$

Ответ: 54.

Задача С–20 (№ 1, IV вариант, с. 36)

Решение (рис. 557):

Так как $\frac{AC}{BD} = \frac{3}{2}$, то $\frac{AO}{BO} = \frac{3}{2}$.

$\Delta BOE \sim \Delta OAE$ по двум углам ($\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$).

Тогда $\frac{S_{BOE}}{S_{AOE}} = k^2 = \frac{4}{9}$. Так как $S_{AOE} = 27$ см^2, то $S_{BOE} = 12$ см^2.

Отсюда $S_{AOB} = 27 + 12 = 39$ (см^2) $\Rightarrow S_{ABCD} = 4 \cdot 39 = 156$ (см^2).

Ответ: 156 см^2.

Задача С–20 (№ 2, IV вариант, с. 36)

Решение (рис. 558):

$\Delta AED \sim \Delta ADB$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle AED = \angle ADB =$ $= 90°$), следовательно, $\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AB}$.

Если $AE = x$, то $BE = \frac{9}{4}x$.

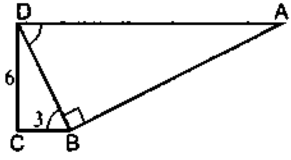


Рис. 556

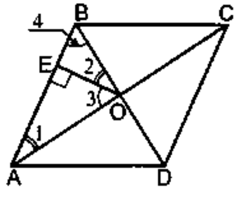


Рис. 557

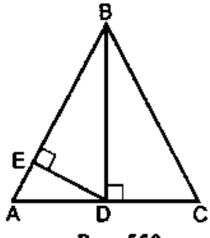


Рис. 558

Так как $\frac{AE}{EB}=\frac{4}{9}$, то $AB=AE+BE=x+\frac{9}{4}x=\frac{13}{4}x$.

Так как $AD=\sqrt{AE\cdot AB}$, то $AD^2=AE\cdot AB=x\cdot\frac{13}{4}x\Rightarrow AD=\frac{x}{2}\sqrt{13}$.

$AD = DC$, отсюда $AC=2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{13}=\sqrt{13}x$.

$BD^2=AB^2-AD^2=\left(\frac{13}{4}x\right)^2-\frac{x^2}{4}\cdot 13=\frac{\sqrt{117}}{16}x^2\Rightarrow BD=\frac{x}{4}\sqrt{117}$.

$BD+AC=14$, тогда $\frac{x}{4}\sqrt{117}+\sqrt{13}x=14$.

$$x=\frac{56}{\sqrt{117}+4\sqrt{13}}=\frac{56}{3\sqrt{13}+4\sqrt{13}}=\frac{56}{7\sqrt{13}}=\frac{8}{\sqrt{13}};$$

$$AB=\frac{13}{4}\cdot\frac{8}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13};\ AC=\sqrt{13}\cdot\frac{8}{\sqrt{13}}=8.$$

$P_{ABC}=AC+AB+BC=8+2\sqrt{13}+2\sqrt{13}=4\sqrt{13}+8$.

Ответ: $4\sqrt{13}+8$.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

П. 64 (с. 150–151), вопрос 13;

Решить задачи № 580, 581;

Решить задачи из сборника: Зив Б. Г., Меймер В. М. Дидактические материалы по геометрии С–20: *I уровень* – IV вариант, с. 36; *II уровень* – VI вариант, с. 55.

Урок 44
Задачи на построение методом подобия

Цель урока:

- Выработать у учащихся навыки использования теорем подобных треугольников при решении задач на построение.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания

Разобрать задачи, с которыми не справилось большинство учащихся.

Устно решить задачи

1. Рис. 559. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$
   Найти: A_1A_2, A_2A_3.
   (*Ответ*: $A_1A_2 = 1{,}5$. $A_2A_3 = 2{,}5$.)
2. $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4 \parallel A_5B_5$, $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B_5 = 3$. $OA_5 = 10$.
   Найти: OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5.

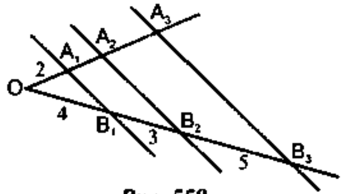


Рис. 559

Решить задачи на построение:

1. Постройте медиану AM треугольника ABC.
2. Постройте биссектрису MA треугольника MNK.
3. Постройте высоту PK треугольника PST.
4. Постройте прямую, параллельную стороне AB треугольника ABC и проходящую через точку C.

III. Решение задач на построение методом подобия треугольников

1. Разобрать задачу № 584 (деление отрезка в данном отношении). Учащиеся самостоятельно читают решение задачи по учебнику, а затем один из наиболее подготовленных учащихся решает ее у доски, остальные в тетрадях.

– Почему точка X делит отрезок AB на отрезки AX и XB, пропорциональные данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2?

2. Решить задачу № 585 а) на доске и в тетрадях учащихся.

Один из учащихся работает у доски, остальные в тетрадях.

Задача № 585 (а)

План построения:

1) Построить луч AD и отложить на нем отрезки AK и KD так, что $AK : KD = 2 : 5$ (например, $AK = 2$ см, $KD = 5$ см).
2) Провести прямую BD.
3) Провести прямую $K \parallel BD$ ($F \in AB$).
   $AF : FB = AK : KD = 2 : 5$.

3. Прочитать самостоятельно п. 64 (задачу 3).

4. Решить самостоятельно задачу № 586 с последующим обсуждением. Учащиеся решают задачу в тетрадях, затем один из них по своему желанию выходит к доске и рассказывает свое решение.

Задача № 586

Построение (рис. 560):

1) Построить угол, равный данному ($\angle A$).
2) Построить биссектрису данного угла и отложить на ней отрезок, равный (AO) биссектрисе данного треугольника.
3) Построить угол, равный второму углу ($\angle B_1$) от произвольной точки на одной из сторон первого угла.

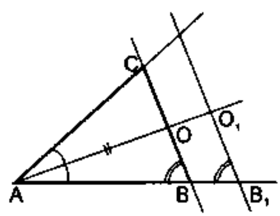
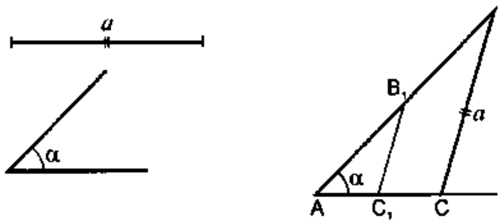


Рис. 560



а) б)

Рис. 561

4) Через точку O провести прямую, параллельную O_1B_1.
5) Прямая OB пересекается со второй стороной угла в точке C. ΔABC – искомый.

5. Решить самостоятельно задачу № 589.

Задача № 589

Дано: $\angle A = \alpha$, $BC = a$, $AB : AC = 2 : 1$ (рис. 561 а).

Построить: ΔABC.

Построение (рис. 561 б):

1) Построить $\angle A = \alpha$.
2) Построить отрезки AC_1 и AB_1 на сторонах $\angle A$ так, что $AB_1 : AC_1 = 2 : 1$.
3) Откладываем отрезок $AB = \dfrac{a}{B_1C_1} \cdot AB_1$, $AC = \dfrac{a}{B_1C_1} \cdot AC_1$.
4) ΔABC – искомый.

IV. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

Решить задачи № 585 б), в), 587, 588, 590.

Урок 45
Решение задач на построение методом подобных треугольников

Цель урока:

- Совершенствовать навыки решения задач методом подобия.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Проверить домашние задачи № 588, 590.

Один из учащихся вызывается к доске и показывает, объясняя другим, ход построения треугольника ABC, удовлетворяющего всем условиям задачи № 588. Остальные учащиеся его слушают и вносят свои исправления, дополнения в решение. Далее для проверки решения задачи № 590 к доске вызывается второй ученик.

Задача № 588

Дано: $\angle A = \alpha$, $AM = a$ (медиана), $AB : AC = 2 : 3$ (рис. 562 а).

Построить: ΔABC.

Построение (рис. 562 б):

1) $\angle A = \alpha$.
2) Построить на сторонах $\angle A$ отрезки AB_1 и AC_1 так, что $AB_1 : AC_1 = 2 : 3$ ($AB_1 = 2$ см, $AC_1 = 3$ см).
3) Построить середину B_1C_1 – точку K. AK – медиана ΔAB_1C_1.
4) На луче AK отложить отрезок AM, равный а.
5) Через точку M провести прямую $BC \parallel B_1C_1$

ΔABC – искомый.

Доказательство: $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$, т. к. $B_1C_1 \parallel BC$) $\Rightarrow \dfrac{AB_1}{AB} = \dfrac{AC_1}{AC} \Rightarrow \dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{AB}{AC}$.

Так как $\dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{2}{3}$, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$.

K – середина $B_1C_1 \Rightarrow M$ – середина BC.

Задача № 590

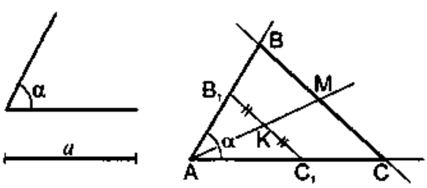
Дано: ΔABC – прямоугольный, $AC : BC = m : n$, c – гипотенуза, $\angle C = 90°$.

Построить: ΔABC.

Построение (рис. 563):

1) $\angle C = 90°$.
2) На сторонах угла C построить отрезки CA_1 и CB_1 так, что $CA_1 : CB_1 = m : n$.
3) A_1B_1 – гипотенуза ΔA_1CB_1.
4) Построить отрезки $CA = \dfrac{c}{A_1B_1} \cdot CA_1$ и $CB = \dfrac{c}{A_1B_1} \cdot CB_1$.

ΔABC – искомый.



а) б)

Рис. 562

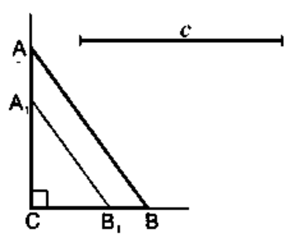


Рис. 563

III. Решение задач

Каждую из задач учащиеся решают самостоятельно, а затем идет обсуждение решения, выбор наиболее рационального способа решения.

1. Задача № 70 из рабочей тетради (с. 32).
2. Построить треугольник ABC по углу A, отношению сторон $AB : AC = 2 : 1$ и расстоянию от точки пересечения медиан до вершины C.

Решение (рис. 564):

Дано: $\angle A = \alpha$, O – точка пересечения медиан, ΔABC, $OC = m$. $AB : AC = 2 : 1$.

Построить: ΔABC.

Построение:

а) Построить угол A, равный α.

б) На сторонах угла A отложить отрезки AC_1 и AB_1 так, что $AB_1 : AC_1 = 2 : 1$.

в) Построить точку пересечения медиан треугольника AB_1C_1 – точку O_1.

г) На луче O_1C_1 отложить отрезок O_1E, равный m.

д) Построить прямую EC, параллельную медиане AM_1 треугольника AB_1C_1 $C = EC \cap AC_1$.

е) Через точку C провести прямую CB, параллельную C_1B_1, $CB \cap AB_1 = B$. Треугольник ABC – искомый.

Доказательство:

а) В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$.

б) $AB : BC = 2 : 1$, так как $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ по двум углам $\Rightarrow$ так как $AB_1 : AC_1 = 2 : 1$ по построению, то $AB : AC = 2 : 1$.

в) O – точка пересечения медиан треугольника ABC, так как если $B_1M_1 = M_1C_1$, то $BM = MC$ ($\Delta AB_1M_1 \sim \Delta ABM$, $\Delta AM_1C_1 \sim \Delta AMC$).

г) $OC = m$, так как $O_1E = m$, а O_1OCE параллелограмм по построению.

Треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи, следовательно, треугольник ABC – искомый.

3. Постройте отрезок $a = \dfrac{(m-n)\cdot m}{n}$, если отрезки m и n известны.

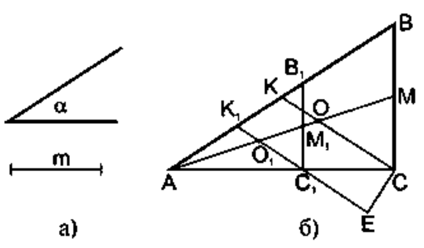


Рис. 564

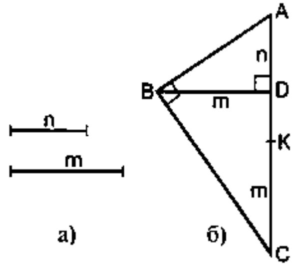


Рис. 565

Решение (рис. 565):

$$\frac{(m-n)\cdot m}{n}=\frac{m^2-m\cdot n}{n}=\frac{m^2}{n}-m.$$

В прямоугольном треугольнике ABC BD – высота, проведенная из вершины прямого угла, поэтому $BD=\sqrt{CD\cdot AD}$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow BD^2 = CD \cdot AD \Rightarrow CD = BD^2 : AD = m^2 : n$. $DK = CD - CK$. Если $CK = m$, то $DK = m^2/n - m$.

Построение:

а) Построить ΔABD, в котором $\angle D = 90°$, $BD = m$, $AD = n$.

б) Провести прямую BC так, что $BC \perp AD = C$.

в) На луче CA отложить отрезок CK, равный m.

г) DK – искомый отрезок.

Задача не имеет решения, если $m < n$.

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок на семь равных частей.
2. Даны отрезки M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 и угол D. Постройте ΔABC так, чтобы $\angle A = \angle D$, $M_1N_1 : AB = M_2N_2 : AC$, $AC = M_3N_3$.
3. Постройте отрезок $x=\sqrt{a\cdot b}$, если даны отрезки a и b.

II вариант

1. Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок на пять равных частей.
2. Даны отрезки O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3 и угол E. Постройте треугольник ABC так, чтобы $\angle B = \angle E$, $BA : O_1P_1 = BC : O_2P_2$, $BA = O_3P_3$.
3. Даны отрезки c и d. Постройте отрезок x такой, что $x^2 = c \cdot d$.

II уровень

I вариант

1. Начертите отрезок и с помощью циркуля и линейки разделите его в отношении 2 : 3.
2. Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.
3. Даны отрезки m и n.
   Постройте отрезок y такой, что $y = n^2 : m + n$.

II вариант

1. Данный отрезок разделить в отношении 4 : 5, используя циркуль и линейку.
2. Постройте равнобедренный треугольник по углу при вершине и биссектрисе угла при основании.
3. Даны отрезки k и h.
   Постройте отрезок y такой, что $y = h^2 : k + k$.

III уровень

I вариант

1. Даны отрезки x, y, z. Постройте отрезок t такой, что $x \cdot t = y \cdot z$.
2. Постройте трапецию по острому углу и диагонали, выходящей из вершины этого угла, если известно, что основания трапеции относятся как 3 : 5, а боковая сторона, образующая данный угол, равна меньшему основанию.
3. Даны отрезки m и n.

   Постройте отрезок k такой, что $k = \dfrac{n \cdot (m+n)}{m}$.

II вариант

1. Даны отрезки a, b, c.
   Постройте отрезок d такой, что $a : c = b : d$.
2. Постройте трапецию по острому углу и диагонали, являющейся биссектрисой этого угла, если известно, что основания трапеции относятся как 2 : 3.
3. Даны отрезки k и р.

   Постройте отрезок m такой, что $m = \dfrac{(k-p)\cdot(k+p)}{p}$.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

П. 42, вопрос 14;
Решить задачи № 606, 607, 628, 629.

Урок 46
Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника

Цели урока:

- Ввести понятия синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.
- Ознакомить учащихся с основным тригонометрическим тождеством и показать его применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 606, 607.

Решение задач заранее подготовлены на доске двумя учениками по просьбе учителя.

Задача № 606

Найти: $OK : ON$.

Решение (рис. 566):

Так как NK – биссектриса, то $\frac{NM}{MK} = \frac{NP}{PK} \Rightarrow \frac{5}{MK} = \frac{3}{PK}$.

$MP = 7 \Rightarrow PK = 7 - MK \Rightarrow \frac{5}{MK} = \frac{3}{7 - MK} \Rightarrow MK = 4\frac{3}{8}$ (см).

Так как MD – биссектриса, то в ΔMNK:

$\frac{MK}{OK} = \frac{MN}{ON} \Rightarrow 4\frac{3}{8} : OK = 5 : ON \Rightarrow OK : ON = 4\frac{3}{8} : 5 = 7 : 8$.

Ответ: $OK : ON = 7 : 8$.

Наводящие вопросы:

- Сформулируйте свойство биссектрисы угла треугольника.
- Какое отношение можно составить из того, что NK – биссектриса ΔMNP?
- Как, используя свойство биссектрисы угла треугольника, можно найти отношение $OK : ON$? Какой треугольник для этого удобнее использовать?

Задача № 607

Решение (рис. 567):

Так как по условию задачи $AC : AB = 4 : 3$, BD – высота, а значит и медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, то $AD = 1/2AC$, следовательно $AD : AB = 2 : 3$.

Т. к. AK – биссектриса $\angle BAC$, то AO – биссектриса в ΔABD, и $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{OD}$. Т. к. $AD : AB = 2 : 3$, $BD = 30$ см, $BO + OD = BD$, то $\frac{3}{2} = \frac{BO}{30 - BO}$.

Тогда $3(30 - BO) = 2\,BO$; $BO = 18$ см $\Rightarrow OD = 30 - 18 = 12$ (см).

Ответ: $BO = 18$ см, $OD = 12$ см.

Наводящие вопросы:

- Какой треугольник удобнее использовать для нахождения отношения $BO : OD$?

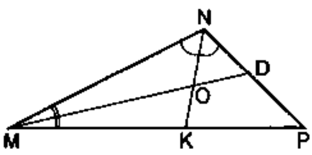


Рис. 566

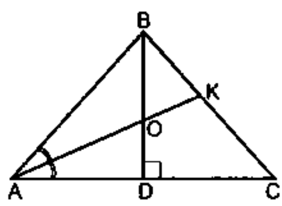


Рис. 567

– Чему равно отношение $AD : AB$? Объясните.
– Сформулируйте свойство биссектрисы AO треугольника ABD? Как его можно использовать для решения данной задачи?
– Как взаимосвязаны отрезки BO и OD? А еще? Составьте уравнение и найдите BO (или OD).

Анализ ошибок самостоятельной работы

Разобрать задания, с которыми не справились большинство учащихся.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие катетов, прилежащих и противолежащих углу.

2. Ввести понятие синуса, косинуса, тангенса острого угла прямоугольного треугольника, их обозначения.

Определения:

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

На доске и в тетрадях учащихся рис. 568 и записи:

AC – катет, прилежащий $\angle A$.

BC – катет, противолежащий $\angle A$.

$\sin A = BC : AB$, $\cos A = AC : AB$, $\mathrm{tg}\, A = BC : AC$.

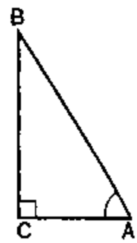


Рис. 568

3. Вычисление значений синуса, косинуса и тангенса с помощью микрокалькулятора и четырехзначных математических таблиц В. М. Брадиса.

4. Вывод формул $tgA = \dfrac{\sin A}{\cos A}$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

а) Так как $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$, $\mathrm{tg}A = \dfrac{BC}{AC}$, то

$\dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{BC}{AB} : \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{BC}{AB} \cdot \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BC}{AC} = \mathrm{tg}A.$

Итак,

$$\mathrm{tg}A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

б) $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2 = \dfrac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2} = 1$ так как в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) по теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$.

Итак,

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Это равенство называют ***основным тригонометрическим тождеством.***

5. Доказать, что если $\angle A = \angle K$, то $\sin A = \sin K$, $\cos A = \cos K$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} K$.

Творческая работа

Решить самостоятельно, обсуждая в парах, задачу:

Докажите, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.

Дано: ΔABC, ΔMNK, $\angle C = \angle M = 90°$, $\angle A = \angle K$.

Доказать: $\sin A = \sin K$, $\cos A = \cos K$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} K$.

Доказательство:

$\Delta ABC \sim \Delta KNM$ по двум углам ($\angle C = \angle M = 90°$, $\angle A = \angle K$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AB}{KN} = \frac{BC}{NM} = \frac{AC}{KM}.$$

Так как $\dfrac{BC}{NM} = \dfrac{AB}{KN}$, то $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{NM}{KN}$, $\dfrac{BC}{AB} = \sin A$, $\dfrac{NM}{KN} = \sin K$, отсюда $\sin A = \sin K$.

Так как $\dfrac{AC}{KM} = \dfrac{AB}{KN}$, то $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{KM}{KN}$, $\dfrac{AC}{AB} = \cos A$, $\dfrac{KM}{KN} = \cos K$, отсюда $\cos A = \cos K$.

Так как $\sin A = \sin K$, $\cos A = \cos K$,
то $\operatorname{tg} A = \sin A : \cos A = \sin K : \cos K = \operatorname{tg} K$.

Наводящие вопросы (задаются по необходимости):

- Что вы можете сказать о треугольниках ABC и MNK?
- Что можно сказать об отношениях их сходственных сторон?
- Примените основное свойство пропорции к равенству $\dfrac{BC}{NM} = \dfrac{AB}{KN}$ $\left(\dfrac{AC}{KM} = \dfrac{AB}{KN}\right)$.
- Что вы можете сказать об отношении противолежащего катета к гипотенузе (прилежащего катета к гипотенузе)?
- Чем можно заменить отношение $\dfrac{BC}{AB}$ $\left(\dfrac{NM}{KN};\ \dfrac{AC}{AB};\ \dfrac{KM}{KN}\right)$?
- Выразите $\operatorname{tg} A$ через $\sin A$ и $\cos A$ ($\operatorname{tg} K$ через $\sin K$ и $\cos K$).
- Равны ли $\operatorname{tg} K$ и $\operatorname{tg} A$?

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 71 (устно); решить самостоятельно задачу 72 с последующим обсуждением.

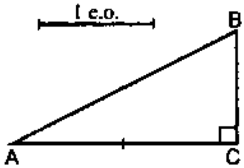


Рис. 569

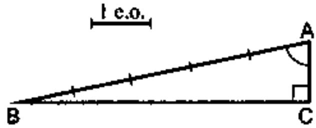


Рис. 570

2. Решить самостоятельно задачи № 591 а), б), 592 а), в), д), 593 а), б).

Задача № 591 (а)

Краткое решение:

$BC = 8$, $AB = 17 \Rightarrow$ по теореме Пифагора $AC = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

Тогда $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{17}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{15}{17}$, $\mathrm{tg}A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{8}{15}$;

$\sin B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{15}{17}$, $\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{8}{17}$, $\mathrm{tg}B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{15}{8}$.

Задача № 591 (б)

Краткое решение:

$BC = 21, AC = 20 \Rightarrow AB = \sqrt{21^2 - 20^2} = 29$.

Тогда $\sin A = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{21}{29}$, $\cos A = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{20}{29}$, $\mathrm{tg}A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21}{20}$;

$\sin B = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{20}{29}$, $\cos B = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{21}{29}$, $\mathrm{tg}B = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{20}{21}$.

Задача № 592 (а)

Краткое решение (рис. 569):

$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ противолежащий катет относится к прилежащему как $1 : 2 \Rightarrow$ нужно построить ΔABC с $\angle C = 90°$, $BC = 1$ е.о.; $AC = 2$ е.о. $\Rightarrow \angle A$ – искомый.

Задача № 592 (в)

Краткое решение (рис. 570):

$\cos\alpha = 0{,}2 = \dfrac{1}{5} \Rightarrow$ отношение прилежащего катета к гипотенузе равно $1 : 5$. $AC = 1$ е.о., $AB = 5$ е.о.

$\angle A$ – искомый.

Задача № 592 (е)

Краткое решение (рис. 571):

$\sin\alpha = 0{,}4 = 2 : 5 \Rightarrow$ в ΔABC ($\angle C = 90°$), $BC = 2$ е.о., $AB = 5$ е.о.

$\angle A$ – искомый.

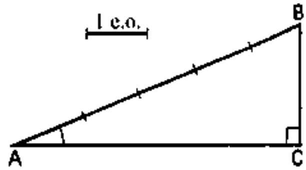


Рис. 571

Задача № 593 (а)

Краткое решение:

$$\cos\alpha=\frac{1}{2},\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Отсюда: $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}.$

Задача № 593 (б)

Краткое решение:

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\ \mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Отсюда: $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}:\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{5}}{2}.$

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 66, вопросы 15–17;

Решить задачу № 73 из рабочей тетради, задачи № 591 в), г), 592 б), г), е), 593 в), г).

Урок 47
Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°

Цели урока:

- Научить учащихся вычислять значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60°.
- Формировать навыки решения прямоугольных треугольников, используя синус, косинус и тангенс острого угла.

Ход урока

I. Организационный момент

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания

Проверить устно домашнюю задачу № 73 из рабочей тетради. Один из учащихся читает свое решение, остальные проверяют.

Решение задач на готовых чертежах

(Работа проводится устно. В это время 3–6 учащихся работают по индивидуальным краточкам.)

1. Рис. 572.

Найти: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\mathrm{tg}\,\beta$.

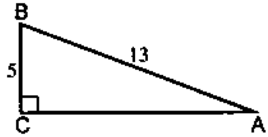


Рис. 572

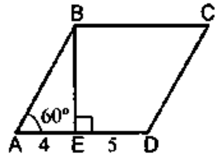


Рис. 573

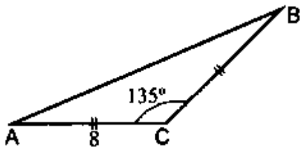


Рис. 574

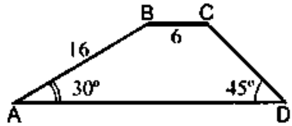


Рис. 575

2. Рис. 573. *Дано*: $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: S_{ABCD}.
3. Рис. 574.
   Найти: S_{ABC}.
4. Рис. 575. *Дано*: $ABCD$ – трапеции.
   Найти: AD.

Работа по индивидуальным карточкам.

I уровень (карточка № 1)

1. В треугольнике MNK $\angle K = 90°$, $MN = 13$ см, $NK = 5$ см. Найдите синусы, косинусы и тангенсы углов M и N.
2. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}3$.

II уровень (карточка № 2)

1. Постройте угол A, равный α, такой, что: а) $\sin\alpha = 3/5$;
   б) $\operatorname{tg}\alpha = 2/3$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) основание равно 12 см, а высота, проведенная к ней 8 см. Найдите синусы, косинусы и тангенсы углов при основании.

III уровень (карточка № 3)

1. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, что $\sin A = 0{,}6$;
   $AB : BC = 1 : 2$.
2. В равнобокой трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $BC = 9$ см, $AD = 21$ см, $AB = 10$ см. Найдите синус, косинус и тангенс угла D.

III. Изучение нового материала

Вычислить значение синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45° и 60° можно в процессе решения задач. Параллельно можно заполнить таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ для углов α, равных 30°, 45°, 60°.

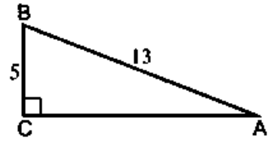


Рис. 572

Задача 1

В ΔABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$ (рис. 576).

Вычислите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

Рекомендации учащимся:

а) Примите BC за x и найдите остальные стороны ΔABC.

б) Вычислите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

в) Найдите еще один способ для вычисления $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.

Задача 2

(Предложить учащимся решить самостоятельно с последующим обсуждением)

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 45°$.

Вычислите $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$.

В ходе решения задач 1, 2 на доске и в тетрадях заполнить таблицу:

	30°	**45°**	**60°**
sinα	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tgα	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

IV. Закрепление изученного материала

Работа в рабочих тетрадях:

а) устно решить задачу № 74;

б) самостоятельно с последующим обсуждением решить задачу № 75;

Решить задачи № 594, 596 (самостоятельно с последующим обсуждением).

Задача № 594

Краткое решение (рис. 577):

а) $\sin B = AC/AB \Rightarrow AB = AC : \sin B = b : \sin\beta$.

$\angle A + \angle B = 90° \Rightarrow \angle A = 90° - \beta$.

$\operatorname{tg}\beta = AC/BC \Rightarrow BC = AC/\operatorname{tg}\beta = b/\operatorname{tg}\beta$.

б) если $b = 10$ см, $\beta = 50°$, то $AB = 10 : \sin 50° \approx 10 : 0{,}766 = 13{,}0548$, $\angle A = 90° - 50° = 40°$.

$BC = 10 : \operatorname{tg} 50° \approx 10 : 1{,}1918 \approx 8{,}39$.

Ответ: а) $AB = b \cdot \sin\beta$, $BC = b : \operatorname{tg}\beta$, $\angle A = 90° - \beta$;

б) $AB \approx 13{,}0548$, $BC \approx 8{,}39$, $\angle A = 40°$.

Вопросы для обсуждения:

– Как найти острый угол прямоугольного треугольника, если другой острый угол равен β?

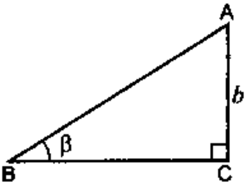


Рис. 577

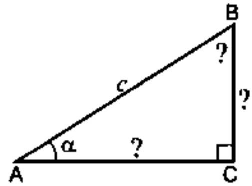


Рис. 578

– Какая связь существует между катетом, противолежащим ему углом и гипотенузой?
– Как взаимосвязаны два катета прямоугольного треугольника и один из его острых углов?
– Как, используя четырехзначные таблицы Брадиса, найти sin50°, tg50°.

Задача № 596

Краткое решение (рис. 578):

Если $\angle A = \alpha$, то $\angle B = 90° - \alpha$.

$\sin\alpha = BC : AB \Rightarrow BC = AB \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin\alpha$.

$\cos\alpha = AC : AB \Rightarrow AC = AB \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha$.

Если $c = 24$ см, $\alpha = 35°$, то $\angle B = 55°$,

$BC = 24 \cdot \sin 35° \approx 24 \cdot 0{,}5736 = 13{,}7664$;

$AC = 24 \cdot \cos 35° \approx 24 \cdot 0{,}8192 = 19{,}6608$.

Ответ: $\angle B = 90° - \alpha = 55°$; $BC = c \cdot \sin\alpha \approx 13{,}7664$; $AC = c \cdot \cos\alpha \approx$ $\approx 19{,}6608$.

Вопросы для обсуждения:

– Каким соотношением связаны между собой гипотенуза, катет и острый угол прямоугольного треугольника?
– Как найти острый угол прямоугольного треугольника по известному второму острому углу?

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 67, вопрос 18;

Решить задачу № 76 из рабочей тетради и задачи № 595, 597, 598.

Дополнительные задачи на урок и на дом

1. В прямоугольной трапеции основания равны 6 см и 11 см, меньшая боковая сторона равна 4 см.
   Найдите синус, косинус и тангенс острого угла трапеции.
2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OD = 10$ см. Из точки D на отрезок OB опущен перпендикуляр DE ($E \cap OB$), $OE = 6$ см. Найдите угол DOE.
3. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 12 см, диагональ BD перпендикулярна сторона AB и равна 7 см.
   Найдите углы параллелограмма.

Урок 48
Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника. Решение задач

Цель урока:
- Совершенствование навыков решения прямоугольных треугольников.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

Вызвать к доске трех учащихся:

а) Вычислить значения синуса, косинуса и тангенса угла 30°.

б) Вычислить значения синуса, косинуса и тангенса угла 60°.

в) Вычислить значения синуса, косинуса и тангенса угла 45°.

Ответы учащихся заслушать после проверки домашнего задания.

Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи: № 76 из рабочей тетради (устно) и № 598 учебника (решение заранее подготовить на доске одному из учащихся или через графопроектор).

Решение задач на готовых чертежах

I уровень – устно с обсуждением решения.

1. Рис. 579.
   Найти: $\sin B$, $\cos B$, $\operatorname{tg} B$.
2. Рис. 580. *Дано*: $AB = 8$.
   Найти: S_{ABC}.
3. Рис. 581. *Дано*: $ABCD$ – прямоугольник.
   Найти: AD, AC.

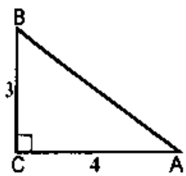


Рис. 579

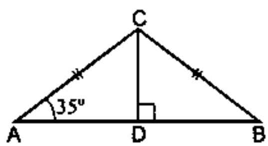


Рис. 580

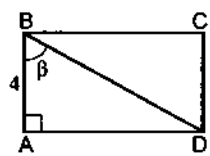


Рис. 581

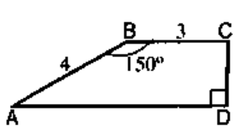


Рис. 582

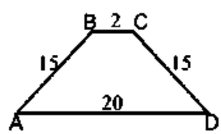


Рис. 583

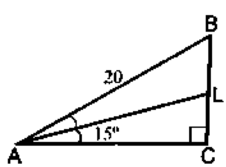


Рис. 584

4. Рис. 582. *Дано*: $ABCD$ – трапеция.
   Найти: AD, CD, S_{ABCD}.
5. Рис. 583. *Дано*: $ABCD$ – трапеция.
   Найти: $\angle A = \angle B$.
6. Рис. 584. *Найти*: AC.

II уровень – самостоятельное решение с самопроверкой по готовым ответам

1. Рис. 585. *Дано*: $ABCD$ – равнобедренная трапеция.
   Найти: S_{ABCD}.
2. Рис. 586. *Найти*: AD, AC.
3. Рис. 587. *Дано*: $ABCD$ – трапеция.
   Найти: AD, S_{ABCD}.
4. Рис. 588. *Дано*: $\cos B = 1/3$, $AB = 4$.
   Найти HK.
5. Рис. 589. *Найти*: BD.
6. Рис. 590. *Найти*: AD.

Ответы к задачам II уровня

(Подготовить на переносной доске.)

1. $S_{ABCD} = 21\sqrt{3}$; 2. $AD = b \cdot \mathrm{tg}\beta \cdot \sin\beta$; $AC = b \cdot \mathrm{tg}\beta$.

3. $AD = 8$; $S_{ABCD} = 14\sqrt{3}$; 4. $HK = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$;

5. $BD = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; 6. $AD = \dfrac{b \cdot \cos\alpha}{\sin\beta}$.

III. Решение задач

Самостоятельно решить задачи № 600, 603, затем обсудить решение. Работу можно организовать в группах.

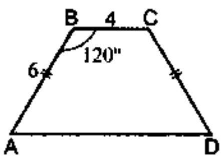


Рис. 585

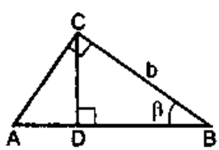


Рис. 586

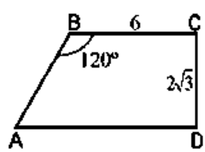


Рис. 587

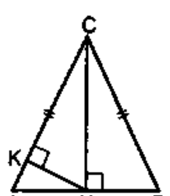


Рис. 588

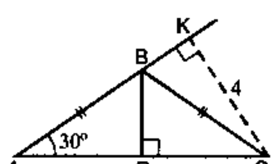


Рис. 589

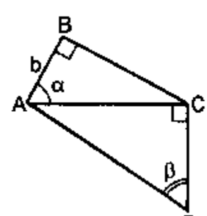


Рис. 590

Задача № 600

Решение (рис. 591):

Насыпь шоссейной дороги в разрезе имеет форму равнобедренной трапеции $ABCD$, в которой $BC = 60$ м, $BH = 12$ м, $\angle A = \angle D = 60°$.

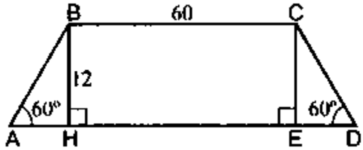


Рис. 591

В ΔABH ($\angle H = 90°$) $\operatorname{tg} A = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow AH = \dfrac{BH}{\operatorname{tg} 60°} = 4\sqrt{3}$ (м).

$\Delta ABH = \Delta DCE \Rightarrow DE = 4\sqrt{3}$ (м).

$HBCE$ – прямоугольник $\Rightarrow HE = 60$ м.

$AD = 2 \cdot AH + HE = 60 + 8\sqrt{3}$ (м) $\approx 73{,}86$ м.

Ответ: $\approx 73{,}86$ м.

Вопросы для обсуждения:

– Какую форму имеет насыпь шоссейной дороги в разрезе?
– Чему равна ширина насыпи в нижней ее части?
– Как взаимосвязаны между собой катеты AH и BН прямоугольного треугольника ABH и угол A?
– Что вы можете сказать о четырехугольнике $HBCE$? Чему равна сторона HE?

IV. Самостоятельная работа (в форме теста)

I уровень

I вариант

В задачах 1, 2 выберите правильный ответ.

1. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle A = 41°$, $BC = 5$ см.
   Найти: AC.
   Варианты ответов:
   а) $5 \cdot \cos 41°$; б) $5 : \operatorname{tg} 41°$;
   в) $5 \cdot \operatorname{tg} 41°$; г) $5 : \sin 41°$.

2. *Дано*: $\sin \alpha = \dfrac{5}{13}$.
   Найти: $\operatorname{tg} \alpha$.
   Варианты ответов:
   а) $\dfrac{5}{12}$; б) $\dfrac{12}{13}$;
   в) $\dfrac{12}{5}$; г) $\dfrac{13}{12}$.

3. Запишите правильный ответ задачи.
   В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, CD – высота, $\angle A = \angle\alpha$, $AB = k$. Найдите AC, BC, AD.

4. Запишите полное решение задачи.
Стороны параллелограмма равны 4 см и 5 см, угол между ними 45°. Найдите высоты параллелограмма.

II вариант

В задачах 1, 2 выберите верный ответ.

1. *Дано*: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle B = 49°$, $BC = 9$ см.
Найти: AC.
Варианты ответов:
а) $9 : \text{tg } 49°$; б) $9 \cdot \cos 49°$;
в) $9 : \sin 49°$; г) $9 \cdot \text{tg } 49°$.

2. *Дано*: $\cos \alpha = \frac{8}{17}$.
Найти: tg α.
Варианты ответов:
а) $\frac{9}{8}$; б) $\frac{15}{8}$;
в) $\frac{8}{15}$; г) $\frac{8}{9}$.

3. Запишите правильный ответ.
В треугольнике MNP $\angle P = 90°$, PK – высота, $\angle N = \beta$, $PN = b$. *Найдите* MN, MP, KN.

4. Запишите полное решение задачи.
Стороны параллелограмма равны 6 и 7 см, угол между ними 60°. *Найдите* высоты параллелограмма.

II уровень

I вариант

В задачах 1, 2 выберите верный ответ.

1. В треугольнике KCP ($KC = CP$) $\angle C = 68°$, $KC = 12$ см.
Найдите KP.
Варианты ответов:
а) $12 \cdot \cos 34°$; б) $6 \cdot \cos 34°$;
в) $24 \cdot \sin 34°$; г) $24 : \sin 34°$.

2. Вычислите значение выражения $\sin^2 60° - 3 \cdot \text{tg } 45°$.
Варианты ответов:
а) –2,25; б) –1,25;
в) –0,75; г) –1,5.

3. Запишите правильный ответ задачи.
Треугольники ABC и ADB имеют общую сторону, $\angle ABC = \angle D = 90°$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABD = \beta$.
Найдите AD, если $BC = a$.

4. Запишите полное решение задачи.
В прямоугольной трапеции меньшее основание равно 6, а меньшая боковая сторона $2\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 120°.

II вариант

В задачах 1, 2 выберите верный ответ.

1. В треугольнике CDE ($CD = DE$) $\angle D = 78°$, $CE = 16$ см.
Найдите CD.
Варианты ответов:
а) $8 \cdot \sin 39°$; б) $16 : \sin 78°$;
в) $8 \cdot \cos 51°$; г) $8 : \sin 39°$.

2. Вычислите значение выражения $\cos^2 45° - 4\sin 30°$.
Варианты ответов:
а) –2; б) –3;
в) –1,5; г) –2,5.

3. Запишите правильный ответ задачи.
Треугольники ABC и ABD имеют общую сторону,
$\angle C = \angle ABD = 90°$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle BAD = \beta$, $AC = m$.
Найдите AD.

4. Запишите полное решение задачи.
В равнобедренной трапеции меньшее основание равно 8, а высота – $\sqrt{3}$. Найдите площадь трапеции, если один из ее углов равен 150°.

III уровень

I вариант

В задачах 1, 2 выберите верный ответ.

1. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 50 см, угол между стороной AB и диагональю BD равен 54°. Найдите сторону AB.
Варианты ответов:
а) $50 : \operatorname{tg} 54°$;
б) $25 : (2 + \operatorname{tg} 54°)$;
в) $25 : (1 + \operatorname{tg} 54°)$;
г) $25 : \operatorname{tg} 54°$.

2. *Дано*: $ABCD$ – ромб, $\angle B = 40°$, $AC = 12$ см.
Найти: высоту ромба.
Варианты ответов:
а) $6 \cdot \sin 70°$; б) $12 \cdot \sin 70°$;
в) $6 : \cos 50°$; г) $12 : \cos 40°$.

3. Запишите правильный ответ задачи.
В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, биссектриса AD равна a, $\angle A = \alpha$.
Найдите BD.

4. Запишите полное решение задачи.
В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) $\angle A = 30°$. Найдите высоту, опущенную к основанию, если $AD = 20$ см ($D \in$ прямой AB, $CD \perp AB$).

II вариант

В задачах 1, 2 выберите верный ответ.

1. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 70 см, угол между стороной AD и диагональю BD равен 39°. Найдите сторону AB.
Варианты ответов:
а) $70 : \text{tg } 39°$;   б) $\dfrac{35 \cdot \sin 39°}{1 + \cos 39°}$;
в) $\dfrac{35 \cdot (1 + \text{tg} 39°)}{\text{tg} 39°}$;   г) $\dfrac{35 \cdot \text{tg} 39°}{1 + \text{tg} 39°}$.

2. *Дано*: $ABCD$ – ромб, $\angle C = 140°$, $AC = 14$ см.
Найти: высоту ромба.
Варианты ответов:
а) $14 \cdot \cos 70°$;
б) $7 : \sin 35°$;
в) $14 : \cos 70°$;
г) $14 \cdot \sin 70°$.

3. Запишите правильный ответ задачи.
В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$. На стороне BC отмечена точка D так, что $\angle BAD = \beta$. *Найдите* BD.

4. Запишите полное решение задачи.
В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине равен 120°, CD – высота. Найдите AD, если высота, проведенная к основанию равна 10 см.

Учащиеся решают задачи в тетрадях и выписывают решение и ответы на листочки, которые в конце урока сдают на проверку учителю. После этого ответы в тетрадях можно проверить по готовым ответам, которые учитель вывешивает в конце урока на стенде или заранее готовит на переносной доске.

Ответы и указания к самостоятельной работе

I уровень

I вариант

1. б).
2. а).
3. $AC = k \cdot \cos \alpha$; $BC = k \cdot \sin \alpha$; $AD = k \cdot \cos^2 \alpha$.
4. $2\sqrt{2}$ см и $2{,}5\sqrt{2}$ см.

II вариант

1. г).

2. б).
3. $MN = b : \cos\beta$; $MP = b \cdot \operatorname{tg}\beta$; $KN = b \cdot \cos\beta$.
4. $3\sqrt{3}$ см $3{,}5\sqrt{3}$ см.

II уровень

I вариант
1. в).
2. а).
3. $a \cdot \sin\beta : \operatorname{tg}\alpha$.
4. $14\sqrt{3}$ см^2.

II вариант
1. г).
2. в).
3. $\dfrac{m}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$.
4. $11\sqrt{3}$ см^2.

III уровень

I вариант
1. в).
2. б).
3. $a \cdot \left(\cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.
4. $\dfrac{20}{3}$ см.

Указания:

$\angle ABC = 120°$ (тупой), значит, точка D лежит на прямой AB так, что B лежит между A и D.

ΔACD – прямоугольный, $AC = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$ см, тогда если провести высоту BH к стороне AC, то $AH = \dfrac{20}{\sqrt{3}}$ см.

Из ΔABH ($\angle AHB = 90°$, $\angle A = 30°$) найдем $BH = 20/3$ см.

II вариант
1. г).
2. г).
3. $c \cdot (\sin\alpha - \cos\alpha \cdot tg(\alpha - \beta))$.
4. 30 см.

Указание:

Пусть BH – высота, тогда в ΔABH $\angle A = 30°$, $BH = 10$ см, значит $AH = \dfrac{30}{\sqrt{3}}$ см, $AC = 2AH = \dfrac{60}{\sqrt{30}}$. ΔABC – тупоугольный, точка D лежит на прямой AB так, что B лежит между A и D. Из прямоугольного треугольника ADC найдем $AD = AC \cdot \cos 30° = 30$ см.

Домашнее задание

Повторить п. 63, 63, 66, 67;

Решить задачи № 77 (рабочая тетрадь) и № 559, 601, 602 (учебник).

Урок 49
Подготовка к контрольной работе

Цели урока:

- Совершенствование навыков решения задач на применение теории подобия треугольников и соотношений между сторонами и углами прямоугольного треугольника.
- Подготовить учащихся к контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Провести тест с целью повторения основных теоретических фактов с последующей самопроверкой.

I вариант

1. Рис. 592.

Для данного треугольника справедливо равенство:

а) $h=\sqrt{a\cdot b}$;

б) $a=\sqrt{x\cdot y}$;

в) $b=\sqrt{y\cdot(x+y)}$.

2. Для данного треугольника (рис. 592) справедливо равенство:

а) $AB : BC = BD : DC$;

б) $AB : AD = BC : DC$;

в) $AB : AC = BD : AB$.

3. Рис. 593.

Для данного треугольника справедливо равенство:

а) $BO : OE = \frac{1}{2}$; б) $AO = \frac{2}{3}AD$; в) $OD = 2AO$.

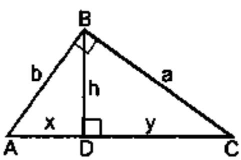


Рис. 592

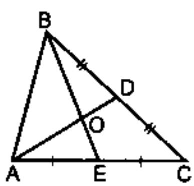


Рис. 593

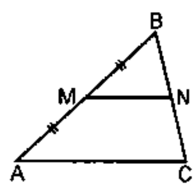


Рис. 594

4. Треугольник, образованный средними линиями прямоугольного треугольника, является:
   а) равносторонним;
   б) прямоугольным;
   в) равнобедренным.
5. Рис. 594.
   MN – средняя линия треугольника ABC, если:
   а) $\angle BMN = \angle BAC$;
   б) $\angle AMN = \angle BNM$;
   в) $BN : NC = MN : AC$.
6. Рис. 595.
   Для данного треугольника справедливо равенство:
   а) $a = b \cdot \cos\alpha$;
   б) $a = c \cdot \cos\alpha$;
   в) $a = c \cdot \sin\alpha$;
7. Рис. 596.
   Для данного треугольника справедливо равенство:
   а) $c = b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$;
   б) $c = b \cdot \mathrm{tg}\,\beta$;
   в) $b = c \cdot \mathrm{tg}\,\alpha$;
8. Значение выражения $\sin 60° + \cos 45°$ равно:
   а) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$.

II вариант

1. Рис. 597.
   Для данного треугольника справедливо равенство:
   а) $k = \sqrt{m+n}$;
   б) $k^2 = m \cdot n$;
   в) $x \cdot y = m \cdot n$.
2. Для данного треугольника (рис. 597) справедливо равенство:
   а) $MN : NK = ME : KE$;
   б) $NE : EK = ME : NK$;
   в) $ME : NE = NE : KE$.
3. Рис. 598.
   Для данного треугольника справедливо равенство:
   а) $OE = NE : 3$;

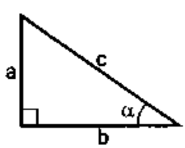


Рис. 595

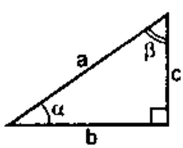


Рис. 596

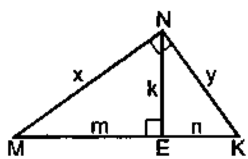


Рис. 597

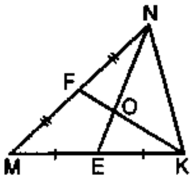


Рис. 598

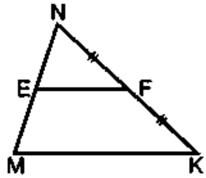


Рис. 599

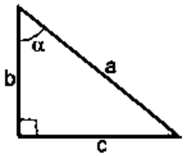


Рис. 600

б) $FO : OK = 2 : 1$;
в) $OE = OK : 2$.

4. Треугольник, образованный средними линиями равнобедренного треугольника, является:
а) прямоугольным;
б) равносторонним.

5. Рис. 599.
EF – средняя линия треугольника MNK, если:
а) $\angle NEF + \angle NMK = 180°$;
б) $\angle KME + \angle MEF = 180°$;
в) $EF : MK = NM : NE$.

6. Рис. 600.
Для данного треугольника справедливо равенство:
а) $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
б) $b = c \cdot \sin \alpha$;
в) $b = a \cdot \sin \alpha$.

7. Рис. 601.
Для данного треугольника справедливо равенство:
а) $a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$;
б) $a = b \cdot \operatorname{tg} \beta$;
в) $b = a \cdot \operatorname{tg} \beta$.

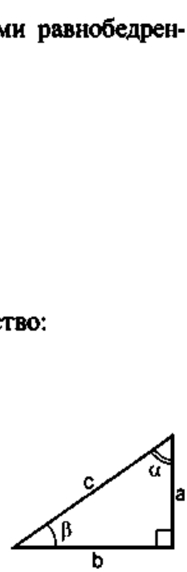


Рис. 601

8. Значение выражения $\sin 45° + \cos 60°$ равно:
а) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Ответы к тесту:

	1	2	3	4	5	6	7	8
I вариант	в	а	б	б	а	в	а	б
II вариант	б	в	а	в	б	а	б	в

III. Анализ ошибок самостоятельной работы

а) Общий анализ ошибок (наиболее распространенных).

б) Работа над ошибками с использованием готовых ответов и указаний к задачам (см. предыдущий урок).

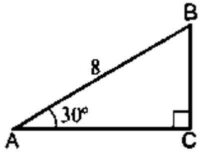


Рис. 602

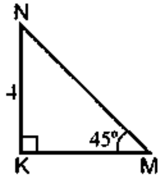


Рис. 603

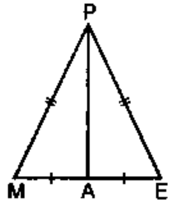


Рис. 604

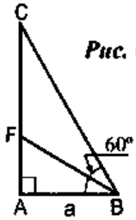


Рис. 605

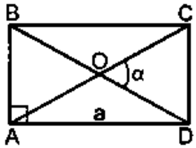


Рис. 606

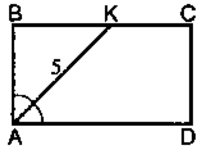


Рис. 607

IV. Решение задач на готовых чертежах

Цель: решить наибольшее количество задач, записав в тетрадях краткое решение, наиболее простые задачи можно решить устно, записав промежуточные результаты на рисунке.

1. Рис. 602.
   Найти: BC, AC, S_{ABC}.
2. Рис. 603.
   Найти: MK, MN.
3. Рис. 604. *Дано*: $ME = b$, $\Delta MPE = \beta$.
   Найти: MP и PA.
4. Рис. 605. *Дано*: BF – биссектриса.
   Найти: BF.
5. Рис. 606. *Дано*: $ABCD$ – прямоугольник.
   Найти: CD, AC, S_{ABCD}.
6. Рис. 607. *Дано*: $\angle(AC, BD) = 60°$.
   Найти: AB, AD, S_{ABCD}.
7. Рис. 608. *Дано*: $MN : MK = 5 : 3$, $AC + BC = 48$.
   Найти: MN, MK.
8. Рис. 609. *Дано*: $ABMH$ – прямоугольник.
   Найти: BH.

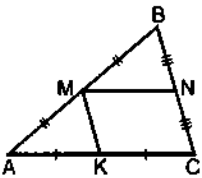


Рис. 608

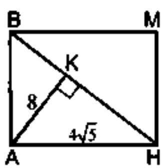


Рис. 609

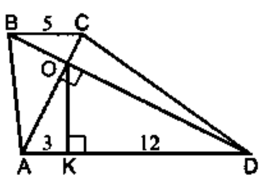


Рис. 610

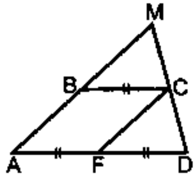


Рис. 611

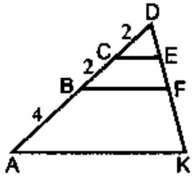


Рис. 612

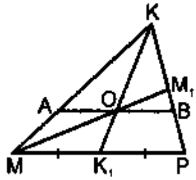


Рис. 613

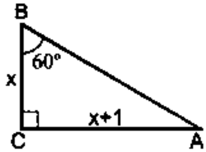


Рис. 614

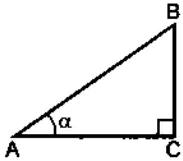


Рис. 615

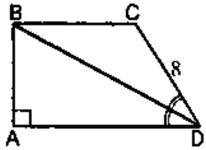


Рис. 616

9. Рис. 610. *Дано*: $ABCD$ – трапеция.
Найти: S_{ABCD}.

10. Рис. 611. *Дано*: $ABCD$ – трапеция, $AM = 10$ см.
Найти: CF.

11. Рис. 612. *Дано*: $CE \parallel BF \parallel AK$, $CE + BF + AK = 21$.
Найти: CE, BF, AK.

12. Рис. 613. *Дано*: $KM_1 = M_1P$, $AB \parallel MP$, $AB = 18$.
Найти: MP.

13. Рис. 614.
Найти: AB.

14. Рис. 615. *Дано*: $P_{ABC} = 2 \cdot p$.
Найти: AB, AC, BC.

15. Рис. 616. *Дано*: $ABCD$ – трапеция, $\angle ADC = 2 \cdot \alpha$.
Найти: S_{ABCD}.

16. Рис. 617. *Дано*: $ABCD$ – трапеция.
Найти: P_{ABCD}.

17. Рис. 618. *Дано*: $ABCD$ – трапеция, $\angle BAC = \beta$.
Найти: AD.

18. Рис. 619. *Дано*: $ABCD$ – трапеция.
Найти: AB, BC, S_{ABCD}.

19. Рис. 620.
Найти: BC, AC, BD, S_{ABCD}.

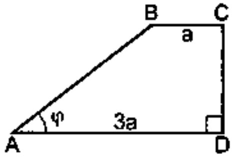


Рис. 617

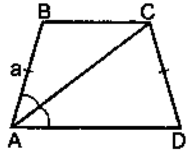


Рис. 618

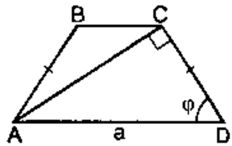


Рис. 619

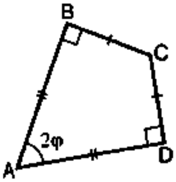


Рис. 620

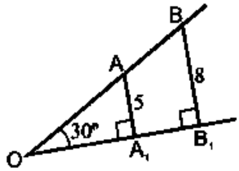


Рис. 621

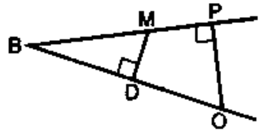


Рис. 622

20. Рис. 621.
Найти: AB, A_1B_1.

21. Рис. 622. *Дано*: $MD : MB = 2 : 7$.
Найти: $BO : PO$.

Ответы к задачам:

1. $BC = 4$; $AC = 4\sqrt{3}$; $S_{ABC} = 8\sqrt{3}$.

2. $MK = 4$; $MN = 4\sqrt{2}$.

3. $MP = \dfrac{b}{2\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$; $PA = \dfrac{b}{2\cdot tg\frac{\beta}{2}}$.

4. $\dfrac{2\cdot a\cdot\sqrt{3}}{3}$.

5. $CD = a\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$; $AC = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$; $S_{ABCD} = a\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$.

6. $AB = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; $AD = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$; $S_{ABCD} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2}$.

7. $MN = 15$; $MK = 9$.

8. $BH = 20$.

9. $S_{ABCD} = 80$.

10. $CF = 5$ см.

11. $CE = 3$; $BF = 6$; $AK = 12$.

12. $MP = 27$.

13. $AB = 1 + \sqrt{3}$.

14. $\dfrac{2\cdot p\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha+1}$; $\dfrac{2\cdot p\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha+1}$; $\dfrac{2\cdot p}{\cos\alpha+\sin\alpha+1}$.

15. $60\cdot\sin 2\alpha + 32\cdot\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

16. $\dfrac{2\cdot a+2\cdot a\cdot\sin\varphi+4\cdot a\cdot\cos\varphi}{\cos\varphi}$.

17. $a + 2\cdot a\cdot\cos 2\beta$.

18. $a\cdot\cos\varphi$; $a - 2a\cdot\cos^2\varphi$; $a^2\cdot\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi$.

19. a; $2a\cdot\cos\varphi$; $2a\cdot\sin\varphi$; $a^2\cdot\sin 2\varphi$.

20. 6; $3\sqrt{3}$.

21. $7 : 2$.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

Решить задачи № 620, 622, 623, 625, 630 (3–4 задачи на усмотрение ученика).

Урок 50
Контрольная работа № 4

Цель урока

- Проверить знания, умения и навыки учащихся по темам «Применение теории подобия треугольников при решении задач» и «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника».

Ход урока

I. Организационный момент

II. Выполнение контрольной работы

(См. приложение.)

Текст контрольной работы раздать учащимся в распечатанном виде.

III. Подведение итого урока

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился непосредственно во время контрольной работы. В конце урока в классе можно вывесить ответы и указания к задачам контрольной работы.

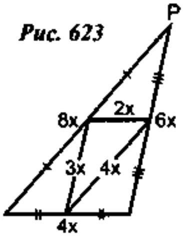
Ответы и указания к задачам контрольной работы

I уровень

I вариант

1. Рис. 623.
   $6 \cdot x + 4 \cdot x + 8 \cdot x = 45$;
   $x = 2{,}5$;
   $6 \cdot x = 15$ см, $4 \cdot x = 10$ см, $8 \cdot x = 20$ см.
   Ответ: 10 см, 15 см, 20 см.
2. $EF = 10$ см.
   Указание (рис. 624):
   $BO : BB_1 = 2 : 3 \Rightarrow EF : AC = 2 : 3$.
3. $\angle B = 30°$, $AB = 10$ см.
   Указание: $tgA = \dfrac{CB}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle A = 60°$, $\angle B = 30°$.
   $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 10$ см.

Рис. 623



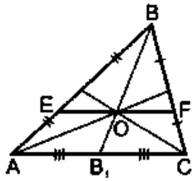


Рис. 624

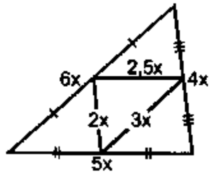


Рис. 625

4. $AH = \dfrac{7 \cdot \sin\beta}{tg\alpha}$.

Указание: $BH = BC \cdot \sin\beta = 7 \cdot \sin\beta$.

$BH : AH = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow AH = \dfrac{BH}{tg\alpha} = \dfrac{7 \cdot \sin\beta}{tg\alpha}$.

5. $AD + BC = 18$ см.

Указание: $BC \parallel AD$, $AB = BK \Rightarrow BC$ – средняя линия $\Delta AKD \Rightarrow$ $\Rightarrow BC = 6$ см.

II вариант

1. 4 см, 5 см, 6 см.

Указание (см. рис. 625):

$4 \cdot x + 5 \cdot x + 6 \cdot x = 30$;

$x = 2$.

$2 \cdot x = 4$ см; $2{,}5 \cdot x = 5$ см; $3 \cdot x = 6$ см.

2. $MK = 18$ см.

Указание (рис. 626):

$NO : NN_1 = 2 : 3 \Rightarrow AB : MK = 2 : 3$.

3. $\angle K = 60°$, $KP = 14$ см.

Указание: $tgP = \dfrac{KT}{TP} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle H = 30°, \angle K = 60°$.

$KP = \sqrt{KT^2 + TP^2} = 14$ см.

4. $AC = \dfrac{4}{tg\alpha} + \dfrac{4}{tg\beta}$.

Указание:

$\operatorname{tg}\alpha = BH : AH \Rightarrow AH = \dfrac{4}{tg\alpha}$, $\operatorname{tg}\beta = BH : HC \Rightarrow HC = \dfrac{4}{tg\beta}$,

$AC = AH + HC = \dfrac{4}{tg\alpha} + \dfrac{4}{tg\beta}$.

5. $MP - NK = 7$ см.

Указание: $NK \parallel MP$, $EK = KP \Rightarrow NK$ – средняя линия $\Delta MEP \Rightarrow$ $\Rightarrow MP = 14$ см.

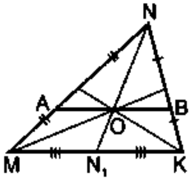


Рис. 626

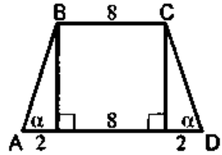


Рис. 627

II уровень

I вариант

1. $BC = 10$ см, $\angle AFK = 80°$.
Указание: KF – средняя линия $\Delta ABD \Rightarrow BD = 12$ см.
$BD : DC = 3 : 2 \Rightarrow DC = 8$ см $\Rightarrow BC = 10$ см.
$\angle AFK = \angle ADB = 80°$.

2. $\angle BCM = 30°$.
Указание:
В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.
В ΔAMC $CM = MA = AC \Rightarrow \angle ACM = 60° \Rightarrow \angle BCM = 30°$.

3. $S = 20 \cdot \text{tg}\,\alpha$, $P = 20 + \dfrac{4}{\cos\alpha}$.
Указание (см. рис. 627):
$\text{tg}\,\alpha = BH : AH \Rightarrow BH = AH \cdot \text{tg}\,\alpha = 2 \cdot \text{tg}\,\alpha$.
$S_{ABCD} = (BC + AD) : 2 \cdot BH = 20 \cdot \text{tg}\,\alpha$.
$$\cos\alpha = AH : AB \Rightarrow AB = \frac{AH}{\cos\alpha} = \frac{2}{\cos\alpha}.$$
$$P_{ABCD} = 8 + 12 + \frac{2}{\cos\alpha} + \frac{2}{\cos\alpha} = 20 + \frac{4}{\cos\alpha}.$$

4. 180 см^2.
Указание:
Если BB_1 – медиана, то $BO : OB_1 = 2 : 1$,
тогда $OB_1 = 5$ см, $BB_1 = 15$ см.
ΔAOB_1 – прямоугольный, значит $AB = \sqrt{AB^2 - OB_1^2} = 12$ см $\Rightarrow$
$\Rightarrow AC = 24$ см.
$S_{ABC} = AC \cdot BB_1 : 2 = 180$ см^2.

5. $BE = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.
Указание:
ΔABD – прямоугольный ($\angle B = 90°$), в нем $AB = BD = 2\sqrt{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ADB = 45°$.

ΔBCE – прямоугольный, $\angle CBE = 45° \Rightarrow \angle CEB = 45° \Rightarrow BE = CE$.
$\operatorname{tg} \angle ECD = ED : CE = 3 \Rightarrow ED = 3 \cdot CE$.

$$BD = BE + ED = CE + 3 \cdot CE = 2\sqrt{5} \Rightarrow CE = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow BE = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

II вариант

1. $CO = 4$ см, $\angle BHM = 75°$.
Указание:
$AM = 22$ см, тогда так как $AH : HM = 4 : 7$, то $AH = 8$ см.
CO – средняя линия $\Delta ABH \Rightarrow CO = 4$ см.
$\angle BHM = 180° - \angle BOC = 75°$.

2. $\angle KDN = 120°$.
Указание:
В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.
В ΔKDM $KD = DN = MK \Rightarrow \angle KDM = 60° \Rightarrow \angle KDN = 120°$.

3. $S = 12 \cdot \sin\alpha \cdot (5 + 3\cos\alpha)$,
$P = 32 + 12 \cdot \cos\alpha$.
Указание (см. рис. 628):
$\sin\alpha = BH : AB \Rightarrow BH = AB \cdot \sin\alpha = 6 \sin\alpha$.
$\cos\alpha = AH : AB \Rightarrow$
$AH = AB \cdot \cos\alpha = 6\cos\alpha$.
$AD = 12 \cdot \cos\alpha + 10$.
$S_{ABCD} = (BC + AD) : 2 \cdot BH =$
$= 12 \cdot \sin\alpha \cdot (5 + 3\cos\alpha)$.
$P = 12\cos\alpha + 10 + 10 + 6 + 6 = 32 + 12\cos\alpha$.

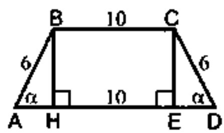


Рис. 628

4. $6\sqrt{13}$ см.
Указание:
Если BB_1 – медиана, то $BO : OB_1 = 2 : 1$, тогда $OB_1 = 5$ см, $BB_1 = 15$ см. ΔCBB_1 – прямоугольный,
значит $CB_1 = \sqrt{BB_1^2 - CB^2} = 9$ см $\Rightarrow AC = 18$ см $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 6\sqrt{3}$ см.

5. $CE = 2\sqrt{2}$.
Указание:
ΔABC – прямоугольный ($\angle B = 90°$), в нем $AB = BC = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BCA = 45°$. $BC \parallel AD \Rightarrow \angle CAD = \angle BCA = 45°$.
ΔAED – прямоугольный, $\angle EAD = 45°$, тогда $AE = ED$.
$\operatorname{tg}\angle ACD = 2 \Rightarrow ED : EC = 2 \Rightarrow ED = 2 \cdot EC$.
$AC = AE + EC = ED + EC = 2 \cdot EC + EC = 6\sqrt{2} \Rightarrow EC = 2\sqrt{2}$.

III уровень

I вариант

1. $tg^2\alpha$.
Указание:
Пусть CH – высота, проведенная к гипотенузе. ΔCBH – прямоугольный, $CH = \sin\alpha$, $BH = \cos\alpha$.
ΔACH – прямоугольный, $HA : CH = tg\,\alpha \Rightarrow$
$$\Rightarrow HA = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha},\ \frac{HA}{BH} = tg^2\alpha.$$
2. $AB = 6$ см.
Указание:
$OM = \sqrt{2}$ см $\Rightarrow OB = 2\sqrt{2}$ см.
В ΔMBC $\angle C = 90°$, $OC \perp MB \Rightarrow OC = \sqrt{OM \cdot OB} = 2$ см $\Rightarrow$
$\Rightarrow KO = 1$ см, $KC = 3$ см.
KC – медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника. $KC = AB : 2 \Rightarrow AB = 6$ см.
3. $AE : EC = 1 : 4$.
Указание (рис. 629):
В ΔACD $\angle C = 90°$, $CK \perp AB$, $AK = 9$ см, $KD = 1$ см $\Rightarrow$
$\Rightarrow CK = \sqrt{AK \cdot KD} - 3$ см, $AC = 3\sqrt{10}$ см.
$$\Delta AKC \sim \Delta CEB \Rightarrow \frac{AK}{CE} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow$$
$$CE = \frac{12\sqrt{10}}{5} \text{ см} \Rightarrow AE = AC - CE = \frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ см} \Rightarrow AE : EC = 1 : 4.$$

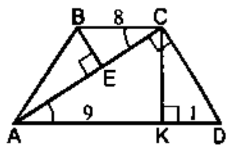


Рис. 629

4. $BN : AM = 2\cos\beta$.
Указание:
Пусть x – одна часть стороны AB или CD, тогда $AM = 7 \cdot x$, $MB = 21 \cdot x$, $CN = 8 \cdot x$, $ND = 20 \cdot x$.
$AMND$ и $MBCN$ – прямоугольные трапеции.
$$S_{AMND} = \frac{1}{2}AD(AM + ND),\ S_{MBCN} = \frac{1}{2}BC(MB + CN).$$

II вариант

1. $tg^2\alpha$.
Указание:
Пусть KE – высота, проведенная к гипотенузе.
ΔKNE – прямоугольный, $\angle NEK = \alpha \Rightarrow NE = \sin\alpha$, $KE = \cos\alpha$.
ΔKEM – прямоугольный, $KE : ME = tg\,\alpha \Rightarrow$
$$\Rightarrow ME = \frac{KE}{tg\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha},\ \frac{NE}{ME} = tg^2\alpha.$$

2. *Указание*:

ΔMCE – прямоугольный, $EC = \sqrt{MC^2 - ME^2} = \sqrt{500}$ см.

ΔMBC – прямоугольный, $EC \perp MB \Rightarrow EC = \sqrt{ME \cdot EB} \Rightarrow$
$\Rightarrow EB = 25$ см $\Rightarrow MB = 45$ см.

Так как $MO = MB : 3 = 15$ см, то $OE = 5$ см.

ΔOEC – прямоугольный $\Rightarrow OC = \sqrt{OE^2 + EC^2} = 5\sqrt{21}$ см $\Rightarrow$

$\Rightarrow CK = \dfrac{15\sqrt{21}}{2}$ см.

$AB = 2 \cdot CK = 15\sqrt{21}$ см.

В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

3. $AK : KD = 5 : 8$.

Указание (рис. 630):

В ΔABD $\angle B = 90°$, $BH \perp AD$, $AH = 4$ см, $HD = 9$ см $\Rightarrow$

$BH = \sqrt{AH \cdot HD} = 6$ см, $BD = 3\sqrt{13}$ см.

$\Delta BHD \sim \Delta CKB \Rightarrow \dfrac{BH}{CK} = \dfrac{HD}{BK} = \dfrac{BD}{BC} \Rightarrow$

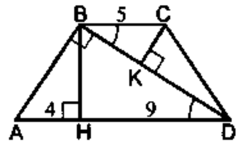


Рис. 630

$BK = \dfrac{15\sqrt{13}}{13}$ см $\Rightarrow KD = BD - BK = \dfrac{24\sqrt{13}}{13}$ см $\Rightarrow BK : KD = 5 : 8$.

4. $ME : NH = 2 \cos \alpha$.

Указание:

$ME = MK \cdot \sin \alpha$, $NH = MK/2 \cdot \text{tg}\, \alpha$.

5. $S_{MNEF} : S_{PKEF} = 17 : 18$.

Указание:

Так как $MP = NK$, то $NE = 20 \cdot x$, $EK = 15 \cdot x$, $MF = 14 \cdot x$, $FP = 21 \cdot x$.

$MNEF$ и $PKEF$ – прямоугольные трапеции.

$S_{MNEF} = \dfrac{1}{2} \cdot MN \cdot (NE + MF)$, $S_{PKEF} = \dfrac{1}{2} \cdot PK \cdot (EK + FP)$.

Окружность

В данной главе рассматриваются такие вопросы как касательная к окружности и ее свойства, центральные и вписанные углы, четыре замечательные точки треугольника, вписанная и описанная окружности.

При изучении этой главы необходимо учесть, что определение окружности и первые сведения об окружностях были даны в седьмом класс (см. п. 21). В восьмом классе эти сведения расширяются и вводятся новые понятия, теоремы, необходимые в дальнейшем при решении задач. Новыми понятиями в данной теме для учащихся будут понятия вписанной и описанной окружностей, вписанного и центрального углов. Важную роль во всем курсе геометрии играют свойства биссектрисы угла, и этому вопросу следует уделить особое внимание. Многие теоретические вопросы рассматриваются в виде задач и в дальнейшем широко используются в процессе решения задач, следовательно, необходимо уделить особое внимание усвоению и закреплению этих теоретических факторов.

Теоретический материал главы не вызывает затруднений у учащихся, что дает возможность учителю для успешной организации учебно-исследовательской деятельности учащихся, самостоятельной работы с учебником и дифференциальной работы.

В этой же теме имеется ряд задач на построение вписанных и описанных окружностей с помощью циркуля.

Урок 51
Взаимное расположение прямой и окружности

Цели урока:

- Рассмотреть различные случаи взаимного расположения прямой и окружности.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ контрольной работы

а) Подвести общий итог результатов контрольной работы.

б) Разобрать задачи, с которыми не справились большинство учащихся при выполнении контрольной работы и задания на дом.

Решение задач с целью подготовки учащихся к изучению нового материала (устно)

1. В окружности с центром O проведены диаметр AC и радиус OK так, что хорда KC равна радиусу. Найдите угол AOK.
2. В окружности с центром O проведены диаметр AC и хорда BC, равная радиусу. Найдите стороны треугольника ABC, если радиус окружности равен 5 см.
3. В окружности с центром O проведена хорда BC, равна 8 см. Найдите расстояние от точки O до отрезка BC, если радиус окружности равен 5 см.
4. Даны окружность с центром O и точка A. Найдите кратчайшее расстояние от точки A до окружности, если радиус окружности равен 7 см, а длина отрезка OA равна: а) 4 см; б) 10 см; в) 7 см.

III. Изучение нового материала

Задача

Даны окружность радиуса r и прямая a, не проходящая через центр O окружности. Расстояние от точки O до прямой a равно d. Сколько точек пересечения могут иметь данные окружность и прямая, если: а) $d < r$; б) $d = r$; в) $d > r$?

Для решения данной задачи класс можно разбить на творческие группы по 3–4 ученика в каждой, у каждой группы – свое задание (рассмотреть один из случаев по указанию учителя).

Обсуждение решения задачи

В ходе обсуждения задачи на доске необходимо выполнить рисунки и записать краткое решение задачи.

а) $d > r$ (рис. 631)

Отложим на прямой p отрезки $HA = HB = \sqrt{r^2 - d^2}$.

По теореме Пифагора $AO = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{d^2 + \left(r^2 - d^2\right)} = r$,

$BO = \sqrt{OH^2 + HB^2} = \sqrt{d^2 + \left(r^2 - d^2\right)} = r.$

$OA = OB = r \Rightarrow A$ и B лежат на окружности $\Rightarrow$ прямая p и окружность имеют две общие точки. Других общих точек прямая p и окружность не имеют. Докажем это: пусть существует еще одна общая точка C, тогда ΔAOC – равнобедренный, его медиана $OD \perp p$, но это невозможно, так как из точки O к прямой p можно провести только один перпендикуляр.

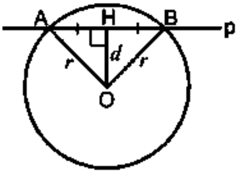


Рис. 631

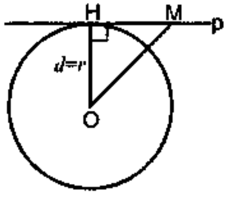


Рис. 632

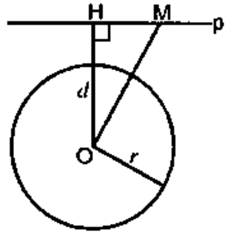


Рис. 633

б) $d = r$ (рис. 632)

$d = OH = r \Rightarrow H$ лежит на окружности $\Rightarrow$ прямая p и окружность имеют одну общую точку. Других общих точек нет, иначе для любой точки M прямой p, отличной от H, $OM > OH$ (как любая наклонная больше перпендикуляра) $\Rightarrow$ точка M не лежит на окружности.

в) $d > r$ (рис. 633)

$OH > r \Rightarrow$ т. к. $OM > OH \Rightarrow OM > r \Rightarrow$ точка M не лежит на окружности.

Вопрос учащимся:

– Сколько общих точек могут иметь прямая и окружность в зависимости от их взаимного расположения?
– Как взаимное расположение прямой и окружности зависит от радиуса окружности и расстояния от центра окружности до прямой? (*Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности, то прямая и окружность имеют две общие точки. Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку. Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.*)

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях:

а) решить устно задачу № 78 (с. 37).

б) разобрать задачу № 79 (с. 37).

Задача № 79

По условию задачи окружность и прямая AB имеют только одну общую точку.

Если бы радиус окружности был меньше расстояния от центра окружности – точка O – до прямой AB, то окружность и прямая имели бы две общие точки.

Если бы радиус окружности был больше расстояния от точки C до прямой AB, то окружность и прямая не имели бы общих точек.

Следовательно, радиус R окружности равен расстоянию от точки C до прямой AB, то есть равен катету AC.

Итак, $R = AC = \sqrt{CB^2 - BA^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ см.

Ответ: радиус окружности равен 12 см.

в) решить задачу № 80 (с. 38) самостоятельно с последующим обсуждением.

Дополнительная задача

В равнобедренной трапеции $ABCD$ меньшее основание BC равно боковой стороне, а большее основание в два раза больше CD. С центром в точке D проведена окружность радиусом, равным CD. Докажите, что прямая AC и окружность имеют одну общую точку.

Доказательство (рис. 634):

а) Так как радиус окружности равен CD, то $AE = ED$, где E – точка пересечения окружности с основанием AD трапеции $\Rightarrow$ $ABCE$ – параллелограмм ($BC \parallel AE$, $BC = AE$) $\Rightarrow AB = CE$.

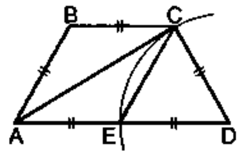


Рис. 634

б) Так как $CE = AB = CD = DE$, то ΔCDE – равносторонний, $\angle ECD = 60° \Rightarrow$ $\angle BCE = 60°$.

в) $ABCE$ – ромб (это параллелограмм, в котором все стороны равны) $\Rightarrow$ диагональ AC является биссектрисой угла BCE, то есть $\angle ACE = 30° \Rightarrow \angle ACD = 90°$.

г) Найдем расстояние от центра D окружности до прямой AC, оно равно длине перпендикуляра, опущенного из точки D к прямой AC, то есть CD, так как $\angle ACD = 90°$.

Итак, получили, что расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то прямая и окружность имеют только одну общую точку.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 68, вопросы 1, 2; решить задачи № 631 в), г), 632, 633.

Дополнительная задача: В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) катеты равны 5 см и 12 см. С центром в точке C проведена окружность. Каково взаимное расположение окружности и прямой AB, если радиус окружности равен:

а) $4\frac{8}{13}$ см; б) $4\frac{5}{13}$ см; в) $4\frac{12}{13}$ см.

Решение: Расстояние от центра C окружности до прямой AB равно высоте CK треугольника ABC.

$$S_{ABC} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ см}^2;\ S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK \Rightarrow CK = \frac{S_{ABC}}{AB:2} = 4\frac{8}{13} \text{ см.}$$

а) $R = 4\frac{8}{13}$ см и $CK = 4\frac{8}{13}$ см $\Rightarrow$ окружность и прямая AB имеют одну общую точку.

б) $R = 4\frac{5}{13}$ см $< CK = 4\frac{8}{13}$ см $\Rightarrow$ окружность и прямая AB не имеют общих точек.

в) $R = 4\frac{12}{13}$ см $> CK = 4\frac{8}{13}$ см $\Rightarrow$ окружность и прямая AB имеют две общие точки.

Урок 52
Касательная к окружности

Цели урока:

- Ввести понятия касательной, точки касания, отрезков касательных, проведенных из одной точки.
- Рассмотреть свойство касательной и ее признак и показать их применение при решении задач.
- Рассмотреть свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки и показать его применение в процессе решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Два ученика готовят решение домашних задач на доске, пока остальные учащиеся решают тест. Задания теста в распечатанном виде раздать на каждую парту.

Тест с целью проверки теории

1. Среди следующих утверждений укажите истинные.
   Окружность и прямая имеют две общие точки, если:
   а) расстояние от центра окружности до прямой не превосходит радиуса окружности;
   б) расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности;
   в) расстояние от окружности до прямой меньше радиуса.
2. Закончите фразу, чтобы получилось верное высказывание.
   Окружность и прямая имеют одну общую точку, если…
3. Вставьте пропущенные слова.
   Окружность и прямая имеют одну общую точку, если…расстояние от … до прямой …

4. Установите истинность или ложность следующих утверждений:

а) Прямая a является секущей по отношению к окружности, если она имеет с окружностью общие точки.

б) Прямая a является секущей по отношению к окружности, если она пересекает окружность в двух точках.

в) Прямая a является секущей по отношению к окружности, если расстояние от центра окружности до данной прямой не больше радиуса.

Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 632, 633.

Задача № 632

Краткое решение (рис. 635):

На прямой p отложим два отрезка AB и AC такие, что $AB = AC = \sqrt{r^2 - d^2}$. По теореме Пифагора $OB = OC = \sqrt{d^2 + (r^2 - d^2)} = r \Rightarrow$ точки B и C лежат на окружности, значит, прямая p является секущей по отношению к данной окружности.

Задача № 633

Краткое решение (рис. 636):

ΔACO – прямоугольный, так как $OABC$ – квадрат. По теореме Пифагора $AC^2 = AO^2 + OC^2 = 6^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow AC = 6\sqrt{2}$ см.

OH – высота равнобедренного треугольника ACO, проведенная к его основанию $\Rightarrow OH$ – медиана этого треугольника, то есть $AH = HC = 3\sqrt{2}$ см.

В ΔAOH по теореме Пифагора $OH^2 = OA^2 - AH^2 = 6^2 - (3\sqrt{2})^2 = 18 \Rightarrow OH = 3\sqrt{2}$ см $\approx 4{,}2$ см.

Радиус окружности равен 5 см $\Rightarrow OH < r \Rightarrow AC$ и окружность пересекается в двух точках. Итак, секущими по отношению к этой окружности, являются AC и OA. AB и BC не являются секущими, так как $d = OA = OC = 6$ см $> r = 5$ см.

Ответ: AC и OA.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие касательной и точки касания.

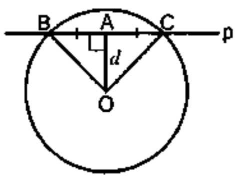


Рис. 635

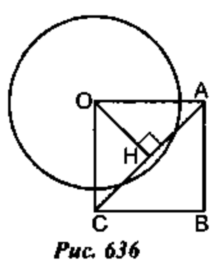


Рис. 636

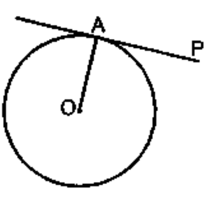


Рис. 637

Определение: Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой и окружности.

Рисунок и записи на доске и в тетрадях учащихся (рис. 637):
p – касательная к окружности; *A* – точка касания.

2. Доказательство теоремы о свойстве касательной к окружности (см. п. 69, с. 166) лучше провести в ходе беседы учителя с учащимися по рис. 212, приготовленному на доске.

– Предположим, что прямая *p* не перпендикулярна радиусу *OA*. Сравните расстояние от центра окружности до прямой *p* с радиусом окружности.
(*Расстояние от точки O – центра окружности – до прямой p меньше радиуса, так как радиус OA в данном случае является наклонной по отношению к прямой p, а расстояние от точки O до прямой p – перпендикуляром к прямой p, а как известно, любая наклонная больше перпендикуляра, проведенного из той же точки к той же прямой что и наклонная.*)
– Каково взаимное расположение прямой *p* и окружности? Почему?
– Может ли прямая *p* быть касательной к окружности? Объясни. (*Прямая p не может быть касательной к окружности, так как она имеет с ней две общие точки.*)
– Верно ли предположение, что прямая *p* не перпендикулярна радиусу *OA*? О чем это говорит? (*Предположение о том, что прямая p не перпендикулярна радиусу неверное, следовательно прямая p перпендикулярна радиусу.*)

3. Ввести понятие отрезков касательных, проведенных из одной точки.

Определение: Отрезки *AB* и *AC* называются отрезками касательных, проведенных из точки *A*, если прямые *AB* и *AC* являются касательными к окружности, точки *B* и *C* – точками касания.

Рисунок и записи на доске и в тетрадях учащихся (рис. 638):

AB и *AC* – отрезки касательных, проведенных из точки *A*.

B и *C* – точки касания.

4. Доказательство свойства отрезков касательных, проведенных из одной точки.

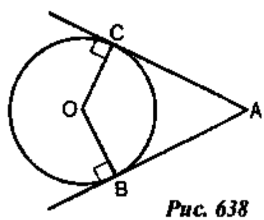


Рис. 638

Творческое задание:

Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Для выполнения творческого задания дать учащимся 3–5 минут, а затем обсудить различные варианты решений. Если учащиеся не смогли самостоятельно справится с заданием, выполнить задание, используя наводящие вопросы.

Решение (рис. 639):

По теореме о свойствах касательной к окружности $AB \perp OB$ и $AC \perp OC \Rightarrow \Delta AOB$ и ΔAOC – прямоугольные, они равны по катету ($OB = OC$) и гипотенузе (OA) $\Rightarrow AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$.

Наводящие вопросы:

– Соединим точки A и O отрезком. Что вы можете сказать о треугольниках AOB и AOC?
– Чем является луч AO для угла BAC? О чем это говорит?

5. Знакомство с признаком касательной и его доказательство.

– Сформулируйте теорему, обратную свойству касательной к окружности.

Теорема: Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

– Верна ли теорема, обратная свойству касательной к окружности?
– Докажите ее справедливость. (*По условию теоремы радиус является перпендикуляром к прямой, значит, расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу. Это говорит о том, что прямая и окружность имеют одну общую точку, т.е. прямая является касательной к окружности.*)

6. Решение задачи на построение.

Дана окружность с центром в точке O и точка M на ней. Построить касательную к окружности, проходящую через точку M (рис. 640).

Вопросы для обсуждения:

– Предположим, a – касательная к окружности, проходящая через точку M. Каково взаимное расположение прямой a и радиуса OM?
– Как построить касательную к окружности, проходящую через M?

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 81, 82 самостоятельно с последующим обсуждением решения.

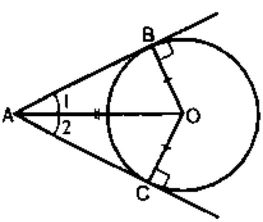


Рис. 639

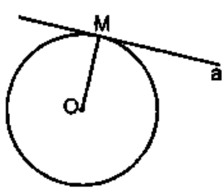


Рис. 640

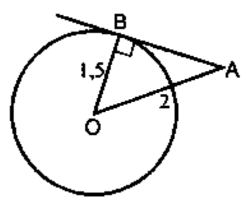


Рис. 641

2. Разобрать решение задачи № 638.

Решение (рис. 641):

ΔAOB – прямоугольный, по теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2^2 - 1{,}5^2} = \sqrt{1{,}75} \text{ (см).}$$

Ответ: $\sqrt{1{,}75}$ см.

Наводящие вопросы:

– Как построить касательную к окружности? (*Сначала провести радиус OB, где B – точка касания, затем провести прямую AB так, что $AB \perp OB$.*)

– Докажите, что прямая AB является касательной к окружности. (*По признаку касательной к окружности.*)

3. Решить самостоятельно задачи № 640, 635, 637.

Задача № 640

Краткое решение (рис. 642):

ΔAOB прямоугольный, $OA = 9$ см, $OB = 4{,}5$ см $\Rightarrow \angle BAO = 30°$.

$\Delta OAC = \Delta AOB \Rightarrow \angle OAC = 30° \Rightarrow \angle BAC = 60°$.

Ответ: 60°.

Задача № 635

Краткое решение (рис. 643):

В ΔAOB $OA = AB$ по условию задачи, $OB = OA$ как радиусы одной окружности $\Rightarrow \Delta AOB$ – равносторонний, $\angle OAB = 60°$.

$OA \perp AC \Rightarrow \angle CAB = 90° - 60° = 30°$.

Ответ: 30°.

Задача № 637

Краткое решение (рис. 644):

ΔAOC – равнобедренный ($OA = OC$ как радиусы) $\Rightarrow \angle 1 = 30°$, $OC \perp CD$ (радиус окружности перпендикулярен касательной) $\Rightarrow \angle OCD = 90°$.

$\angle ACD = \angle 1 + \angle OCD = 180° - (\angle A + \angle ACD) = 180° - (30° + 120°) = 30° \Rightarrow \Delta ACD$ – равнобедренный с основанием AD.

Дополнительная задача

AB и BC – отрезки касательных, проведенных из точки B к окружности с центром O. Найдите AB и BC, если $OA = 16$ см, а радиусы, проведенные к точкам касания, взаимно перпендикулярны.

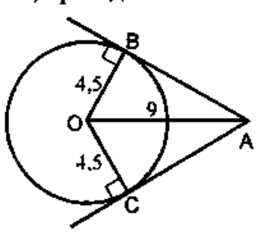


Рис. 642

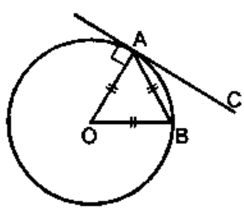


Рис. 643

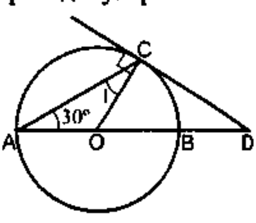


Рис. 644

Решение (рис. 645):

Т. к. BA и BC – отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, то $OA \perp AB$, $OC \perp CB$, $AB = BC$ и $\angle 1 = \angle 2$ $\Rightarrow \angle AOB = \angle COB$.

Т. к. $OA \perp OC$ и $\angle AOB = \angle COB = 45° \Rightarrow$ $\angle 1 = 45°$, $\angle 2 = 45°$.

ΔAOB – равнобедренный с основанием OB, значит, $OA = AB$.

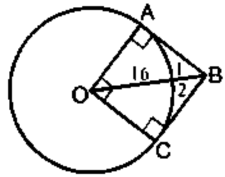


Рис. 645

По теореме Пифагора $OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow$ так как $OA = AB$, то $2 \cdot OA^2 = 16^2 \Rightarrow OA = 8\sqrt{2}$ см $\Rightarrow AB = BC = 8\sqrt{2}$ см.

Ответ: $8\sqrt{2}$ см, $8\sqrt{2}$ см.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 69, вопросы 3–7;

Решить задачу № 83 из рабочей тетради и задачи № 634, 636, 639 учебника.

Урок 53
Касательная к окружности. Решение задач

Цели урока:

- Закрепить теоретический материал п. 69.
- Совершенствовать навыки решения задач по теме.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Теоретический опрос

(Три ученика готовятся у доски.)

– Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.
– Сформулируйте и докажите теорему о свойстве отрезков касательных к окружности, проведенных из одной точки.
– Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.

Проверка домашнего задания

Проверить домашнюю задачу № 83 из рабочей тетради устно.

Проверить домашнюю задачу № 639 через графопроектор.

Задача № 639

Решение (рис. 646): ΔAOB – прямоугольный, $\angle A = 90° - \angle O = 30°$ $\Rightarrow OB = \frac{1}{2} OA \Rightarrow OA = 24$ см.

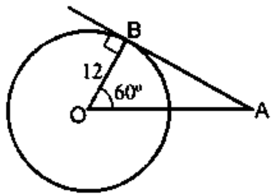


Рис. 646

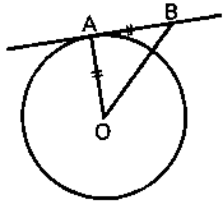


Рис. 647

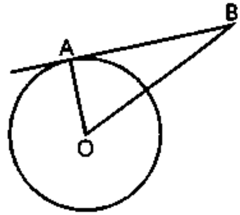


Рис. 648

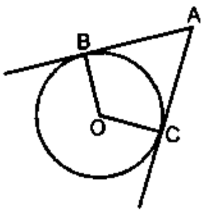


Рис. 649

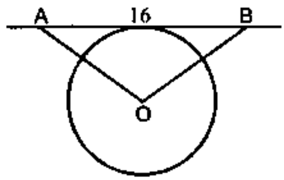


Рис. 650

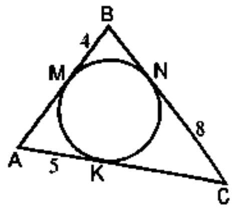


Рис. 651

По теореме Пифагора $AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 12\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $12\sqrt{3}$ (см).

Наводящие вопросы

– Каково взаимное расположение касательной AB и радиуса OB?
– Как найти катет AB треугольника AOB?

Далее можно заслушать учащихся, подготовивших у доски доказательства теорем.

Решение задач на готовых чертежах

(Самостоятельно с последующей проверкой по готовым ответам.)

1. Рис. 647. *Дано*: $R = 5$, AB – касательная.
   Найти: OB.
2. Рис. 648. *Дано*: AB – касательная; $AB = 12$, $OB = 13$.
   Найти: R окружности.
3. Рис. 649. *Дано*: AB, BC – касательные, $OB = 2$, $AO = 4$.
   Найти: $\angle BOC$.
4. Рис. 650. *Дано*: AB – касательная, $R = 6$, $AO = OB$.
   Найти: AO.
5. Рис. 651. *Дано*: M, N, K – точка касания.
   Найти: P_{ABC}.
6. Рис. 652. *Дано*: $AB = 10$ см, O – центр окружности, CD – касательная, $AE \parallel CD$. *Найти*: OC.

Ответы к задачам:

1) $OB = 5\sqrt{2}$; 2) $R = 5$;

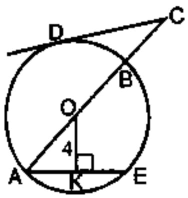


Рис. 652

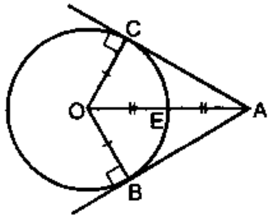


Рис. 653

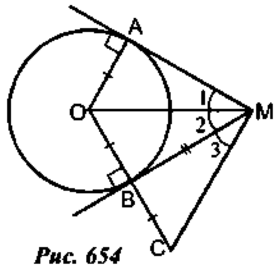


Рис. 654

3) $\angle BOC = 120°$; 4) $OA = 10$;

5) $P_{ABC} = 34$; 6) $OC = 6\frac{1}{4}$.

III. Решение задач

1. Решить самостоятельно задачу № 84 из рабочей тетради с последующим обсуждением.

Задача № 84

Так как в треугольнике AOM $AO = OM$, то $\angle AMO = \angle MAO = 30°$.

В треугольнике AMC $\angle AMC = 180° - (\angle MAC + \angle MCA) =$
$= 180° - (30° + 30°) = 120°$.

Поэтому $\angle OMC = \angle AMC - \angle AMO = 120° - 30° = 90°$,
т. е. $MC \perp OM$.

Итак, прямая CM проходит через конец радиуса OM, лежащий на окружности, и перпендикуляра к этому радиусу. Поэтому она является касательной к данной окружности, что и требовалось доказать.

2. Самостоятельно решить задачи № 641, 644, 647, записав краткое решение (учитель в это время оказывает индивидуальную помощь менее подготовленным учащимся).

Задача № 641

Краткое решение (рис. 653):

$$\text{В } \Delta OAC\ \angle C = 90°,\ OC = \frac{1}{2}OA \Rightarrow \angle OAC = 30° \Rightarrow \angle BAC = 60°.$$

Задача № 644

Краткое решение (рис. 654):

MA и MB – отрезки касательных, проведенных из точки $M \Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2$. Точки O и C симметричны относительно точки $B \Rightarrow OB = BC$ и O, B, C лежат на одной прямой $\Rightarrow \Delta OMB = \Delta CMB$ по двум катетам $\Rightarrow \angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \angle AMC = 3 \cdot \angle BMC$.

Задача № 647

Краткое решение (рис. 655):

а) $OA = 5$ см, $AH = 4$ см $\Rightarrow OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 3$ см $= r \Rightarrow$ AH – касательная к окружности.

б) $\angle HAO = 45°$, $OA = 4$ см $\Rightarrow OH = HA$, $OH^2 + HA^2 = OA^2 \Rightarrow 2 \cdot OH^2 = 16 \Rightarrow$ $OH = 2\sqrt{2}$ см $\neq 3$ см $\Rightarrow$ AH является касательной к окружности.

в) $\angle HAO = 30°$, $OA = 6$ см $\Rightarrow$

$OH = \dfrac{1}{2}OA = 3$ см $= r \Rightarrow AH$ – касательная к окружности.

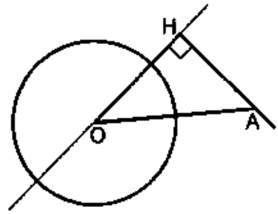


Рис. 655

Ответ: а) да; б) нет; в) да.

IV. Самостоятельная работа

К первой задаче из самостоятельной работы записать краткое решение (можно на рисунке); ко второй задаче – полное решение.

I уровень

I вариант

1. Прямая KE касается окружности с центром в точке O, K – точка касания. Найдите OE, если $KE = 8$ см, а радиус окружности равен 6 см.

2. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см. Докажите, что AB – отрезок касательной, проведенной из точки A к окружности с центром в точке C и радиусом, равным 3 см.

II вариант

1. Прямая MN касается окружности с центром в точке O, M – точка касания, $\angle MNO = 30°$, а радиус окружности равен 5 см.

Найдите NO.

2. В треугольнике MNK $MN = 6$ см, $MK = 8$ см, $NK = 10$ см. Докажите, что MK – отрезок касательной, проведенной из точки K к окружности с центром в точке N и радиусом, равным 6 см.

II уровень

I вариант

1. AB и BC – отрезки касательных, проведенных к окружности с центром O и радиусом, равным 10 см. Найдите BO, если $\angle AOC = 60°$.

2. Докажите, что основание AC равнобедренного треугольника ABC является касательной окружности с центром в точке B и радиусом, равным медиане треугольника, проведенной к его основанию.

II вариант

1. MN и NK – отрезки касательных, проведенных к окружности с центром O, $\angle MNK = 90°$.

Найдите радиус окружности, если $ON = 2\sqrt{2}$ см.

2. Докажите, что стороны равностороннего треугольника касаются окружностей, проведенных с центрами в его вершинах и радиусами, равными любой из его биссектрис.

III уровень

I вариант

1. EK и EF – отрезки касательных, проведенных к окружности с центром O и радиусом, равным 6 см, $\angle KOF = 120°$, A – точка пересечения KF и OE. Найдите OA и AE.

2. Даны угол и отрезок. Постройте окружность радиусом, равным данному отрезку, касающуюся сторон данного угла.

II вариант

1. PM и PN – отрезки касательных, проведенных к окружности с центром O и радиусом, равным 10 см, $\angle MON = 120°$, E – точка пересечения MN и OP. Найдите OE и PE.

2. Даны угол и отрезок. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла, с центром, удаленным от вершины угла на расстояние, равное длине данного отрезка.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи № 641, 643, 645, 648.

Урок 54
Градусная мера дуги окружности

Цели урока:

- Ввести понятие градусной меры дуги окружности, центрального угла.
- Научить решать простейшие задачи на вычисление градусной меры дуги окружности.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 645, 648.

Анализ самостоятельной работы

а) Общий анализ (сообщение результатов, разбор задач, в которых большинство учащихся допустили ошибки).

б) Работа над ошибками с последующей самопроверкой по готовым ответам и указаниям к задачам самостоятельной работы.

Ответы и указания к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. $OE = 10$ см.

2. *Указание*: ΔABC – прямоугольный, $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

II вариант

1. $NO = 10$ см.

2. *Указание*: ΔMNK – прямоугольный, $NK^2 = MN^2 + MK^2$.

II уровень

I вариант

1. $BO = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ см.

2. *Указание*: медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его высотой, следовательно.

II вариант

1. 2 см.

2. *Указание*: любая биссектриса равностороннего треугольника является его высотой.

III уровень

I вариант

1. $OA = 3$ см, $AE = 9$ см.

2. *Указание*: проведи прямые, параллельные сторонам данного угла и удаленные от них на расстояние, равное данному отрезку во внутренней области данного угла. Точка пересечения этих прямых есть центр искомой окружности.

II вариант

1. $OE = 5$ см, $EP = 15$ см.

2. *Указание*: построй биссектрису данного угла и на ней отметить точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное данному отрезку. Полученная точка есть центр искомой окружности, а ее радиус равен длине перпендикуляра, опущенного из данной точки к любой из сторон угла.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие дуги окружности, используя рисунок 214 учебника. Ознакомить со способами обозначения дуг.

2. Ввести понятие полуокружности, используя рисунок 215 а) учебника.

3. Ввести понятие центрального угла, используя рис. 656, и градусной меры дуги окружности.

$\angle AOB = \smile AB$, $\angle BOC = \smile BC$, $\angle AOC = \smile ABC$.

$\smile AB$ меньше полуокружности $\Rightarrow$

$\Rightarrow \smile AB = \angle AOB$.

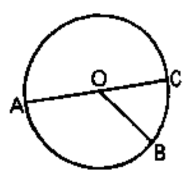
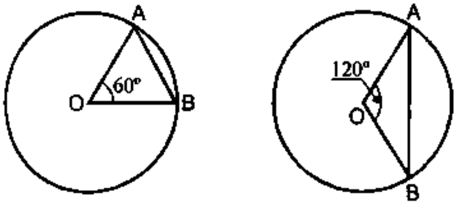


Рис. 656



а) *Рис. 657* б)

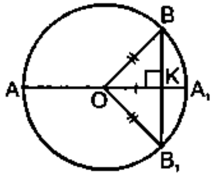


Рис. 658

$\smile ACB$ больше полуокружности $\Rightarrow \smile ACB = 360° - \angle AOB$.

$\smile AB + \smile ACB = 360°$.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 85 устно, задачу № 86 письменно с последующим обсуждением решения.
2. Решить задачи № 650 а), в), 651 а) устно.
3. Решить задачу № 649 а), в) самостоятельно.

Задача № 649 (а, в)

а) Рис. 657 а). $\angle AOB = 60°$, AB – хорда.

б) Рис. 657 б). $\angle AOB = 120°$, AB – хорда.

4. Решить задачи № 715, 716 (при наличии времени).

Задача № 715

См. рис. 658.

$\smile AB = \angle AOB$, так как $\smile AB$ меньше полуокружности.

$\smile AB_1 = \angle AOB_1$, так как $\smile AB_1$ меньше полуокружности.

$\Delta OBK = \Delta OB_1K$ по гипотенузе и катету ($OB = OB_1$ как радиусы, OK – общий катет, $\angle OKB = \angle OKB_1 = 90°$) $\Rightarrow \angle BOK = \angle B_1OK \Rightarrow$ $\angle AOB = 180° - \angle BOK = 180° - \angle B_1OK = \angle AOB_1 \Rightarrow \smile AB = \smile AB_1$.

Задача № 716

См. рис. 659.

$\smile AB = \smile CD \Rightarrow \angle AOB = \angle COD \Rightarrow \Delta AOB = \Delta COD$ по двум сторонам и углу между ними ($AO = BO = CO = DO$ как радиусы одной окружности), тогда $AB = CD$.

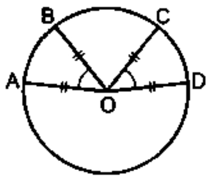


Рис. 659

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 70, вопросы 8–10;

Решить задачи № 649 б), г), 650 б), 651 б), 652.

Урок 55
Теорема о вписанном угле

Цели урока:

- Ввести понятие вписанного угла.
- Рассмотреть теорему о вписанном угле и следствия из нее.

- Показать применение теоремы о вписанном угле и следствий из нее при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

К доске вызвать двух учащихся для оформления решения домашней задачи № 652. Остальные учащиеся решают устно задачи на готовых чертежах.

Повторение теоретического материала в процессе решения задач на готовых чертежах (устно)

1. Рис. 660. *Дано*: $\cup MKE$ в два раза меньше $\cup MNE$.
   Найти: $\cup MKE$, $\cup MNE$.
2. Рис. 661. *Дано*: $\cup AKE$ на 140° меньше $\cup APE$.
   Найти: $\cup APE$.
3. Рис. 662. *Дано*: $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 2 : 3 : 4$.
   Найти: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle AOC$.
4. Рис. 663. *Дано*: $\angle MON : \angle NOK : \angle MOE = 3 : 4 : 5$.
   Найти: $\cup ME$, $\cup NK$, $\cup KE$.

Ответы к задачам:

1) $\cup MKE = 120°$, $\cup MNE = 240°$;
2) $\cup APE = 250°$;
3) $\angle AOB = 80°$, $\angle BOC = 120°$, $\angle AOC = 160°$;
4) $\cup ME = 120°$, $\cup NK = 96°$, $\cup KE = 72°$.

Проверка домашнего задания

Проверить домашнюю задачу № 652.

Задача № 652

Решение (рис. 664):

$\angle COD = 180° - (\angle AOC + \angle BOD) = 180° - (37° + 23°) = 120°$.

В ΔCOD $\angle COD = 120°$, $OC = OD \Rightarrow \angle OCD = \angle CDO = 30°$.

Проведем высоту $OH \Rightarrow \cos 30° = CH/CO \Rightarrow$

$$CH = CO \cdot \cos 30° = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ (см)}.$$

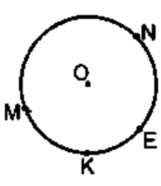


Рис. 660

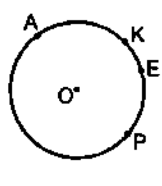


Рис. 661

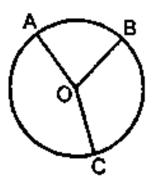


Рис. 662

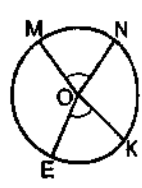


Рис. 663

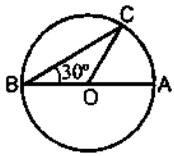


Рис. 664

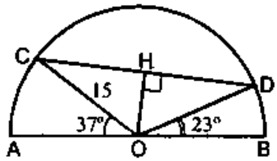


Рис. 665

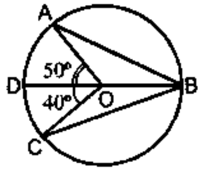


Рис. 666

OH – высота и медиана $\Rightarrow CD = 2 \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $CD = 15\sqrt{3}$ см.

Наводящие вопросы

– Что вы можете сказать о треугольнике COD?

– Проведем высоту катета CH. Как можно найти длину катета CH?

– Чему равна длина хорды CD?

Решение задач на готовых чертежах с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

(Самостоятельно с последующим обсуждением.)

1. Рис. 665.

Найти: $\cup AC$.

2. Рис. 666.

Найти: $\angle ABC$.

Ответы к задачам:

1) $\cup AC = 60°$;

2) $\angle ABC = 45°$.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие вписанного угла, используя заготовленный на доске рис. 667.

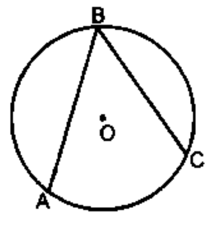


Рис. 667

Определение: Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

$\angle ABC$ – вписанный в окружность с центром O.

$\angle ABC$ опирается на $\cup AC$.

2. Доказать теорему о вписанном угле.

а) Случай, когда луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC учитель доказывает сам в ходе беседы с учащимися.

б) Случаи, когда луч BO делит угол ABC на два угла и когда луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла, предложить учащимся доказать самостоятельно по вариантам с последующим обсуждением доказательств.

Теорема: Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

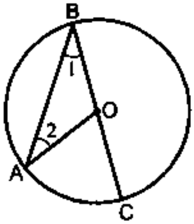


Рис. 668

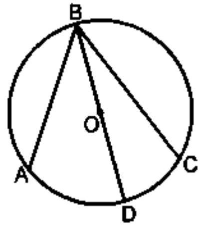


Рис. 669

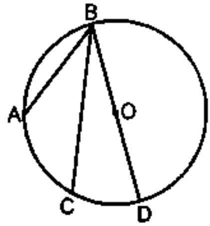


Рис. 670

Дано: $\angle ABC$ – вписанный угол, опирающийся на дугу AC; O – центр окружности.

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Доказательство: Возможны три случая: 1) рис. 668; 2) рис. 669; 3) рис. 670.

1) Луч BO совпадает с одной из сторон угла. Проведем радиус OA.

– Что вы можете сказать о ΔAOB? (*ΔAOB – равнобедренный, так как $AO = OB$ как радиусы $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$ как углы при основании равнобедренного треугольника.*)

– Каким по отношению к ΔAOB является $\angle AOC$? Чему равна его градусная мера? (*$\angle AOC$ – внешний угол ΔAOB. $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2 \cdot \angle 1 = 2 \cdot ABC$.*)

– Каким является $\angle AOC$ по отношению к окружности? Чему равна его величина? (*$\angle AOC$ – центральный, $\angle AOC = \cup AC$.*)

– Выразите величину $\angle ABC$ через величину дуги AC. (*Так как $\angle AOC = 2 \cdot \angle ABC = \cup AC$, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.*)

– Итак, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Задание учащимся:

I вариант: рассмотреть II случай и доказать, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

II вариант: рассмотреть III случай и доказать, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Продолжение доказательства (один из учащихся выходит к доске и доказывает случай 2, а другой ученик – случай 30).

2) Луч OB проходит между сторонами $\angle ABC \Rightarrow \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD$. Исходя из 1 случая $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$, $\angle CBD = \frac{1}{2} \cup CD \Rightarrow$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} (\cup AD + \cup CD) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

3) Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла $\Rightarrow \angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2}\cup AD - \frac{1}{2}\cup CD = \frac{1}{2}(\cup AD - \cup CD) = \frac{1}{2}\cup AC.$

3. Следствия 1 и 2 теоремы о вписанном угле можно предложить доказать в виде следующих задач для самостоятельного решения с последующим обсуждением решения.

Задача 1: доказать, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

Задача 2: доказать, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 87 устно, № 88, 89 самостоятельно с последующим обсуждением решения.

Задача № 88

Угол AOB является центральным углом данной окружности и равен 92°, следовательно, $\cup AMB = 92°$.

Угол ACB является вписанным углом и опирается на дугу AMB, поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2}\cup AMB = 46°$.

Ответ: $\angle ACB = 46°$.

Задача № 89

Угол MAP является вписанным углом и опирается на дугу MBP.

$\cup MBP = 360° - \cup MAP = 360° - 120° = 240°$, $\angle MAP = \frac{1}{2}\cup MBP = 120°$.

Ответ: $\angle MAP = 120°$.

2. Решить устно задачу № 653.

3. Разобрать всем классом задачу № 656. Один из учащихся работает у доски, остальные – в тетрадях.

Задача № 656

1 случай (см. рис. 671)

$\cup AC = 43°$, $\cup AB = 115° \Rightarrow \cup CDB = 360° - (\cup AC + \cup AB) = 202°$. Вписанный $\angle BAC$ опирается на дугу CDB и равен ее половине, то есть $\angle BAC = 101°$.

2 случай (см. рис. 672)

$\cup CB = \cup ACB - \cup AC = 115° - 43° = 72°$. $\angle BAC$ является вписанным и равен половине дуги CB, на которую он опирается, то есть $\angle BAC = 36°$.

Ответ: 101° или 36°.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о градусной мере дуги AB (дуги AC)?
– Чему равна градусная мера дуги CDB?

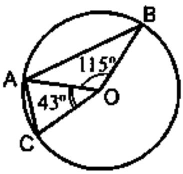


Рис. 671

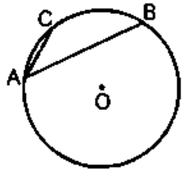


Рис. 672

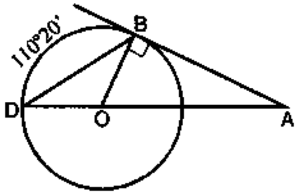


Рис. 673

– На какую дугу опирается угол BAC и чему равна его величина?
– Сколько решений имеет задача?

4. Самостоятельно решить задачи № 654 а), в), 658.

Задача № 654 (а, в)

Краткое решение:

а) $x = \frac{1}{2}(360° - 152° - 80°) = 64°$.

б) $x = \frac{1}{2}(360° - 180° - 112°) = 34°$.

Задача № 658

Краткое решение (рис. 673):

$\angle DOB$ – центральный, $\angle DOB = \smile DB = 110°20'$.

ΔDOB – равнобедренный с основанием $DB \Rightarrow \angle ODB = OBD = \frac{1}{2}(180° - \angle DOB) = \frac{1}{2}(180° - 110°20') = \frac{1}{2} \cdot 69°40' = 34°50' \Rightarrow \angle ADB = 34°50'$.

$\angle BOA$ – внешний угол $\Delta DOB \Rightarrow \angle BOA = \angle OBD + \angle ODB = 69°40'$.

$\angle OBA = 90°$, так как радиус OB перпендикулярен касательной AB, тогда в прямоугольном ΔOAB $\angle BAD = 90° - \angle BOA = 90° - 69°40' = 20°20'$.

Ответ: $\angle BAD = 20°20'$, $\angle ADB = 34°50'$.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

П. 71, вопросы 11–13; решить задачи № 654 б), г), 655, 657, 659.

Урок 56
Теорема об отрезках пересекающихся хорд

Цели урока:

- Рассмотреть теорему об отрезках пересекающихся хорд и показать ее применение при решении задач.

- Совершенствовать навыки решения задач на применение теоремы о вписанном угле и ее следствий.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

К доске вызываются пять учащихся для доказательства теорем, остальные учащиеся решают задачи на готовых чертежах. Доказательство теорем заслушивается всем классом после проверки правильности решений задач на готовых чертежах.

Теоретический опрос

1. Доказать теорему о вписанном угле:
первый ученик – случай 1 (с. 171 учебника);
второй ученик – случай 2 (с. 172 учебника);
третий ученик – случай 3 (с. 172 учебника).

2. Доказать, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.

3. Доказать, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность – прямой.

Решение задач на готовых чертежах

(Самостоятельно с последующим обсуждением решений тех задач, с которыми не справились большинство учащихся.)

Учитель в это время индивидуально проверяет домашние задачи.

1. Рис. 674.
Найти: $\angle ABC$.

2. Рис. 675.
Найти: $\angle ABC$.

3. Рис. 676.
Найти: $\angle A$, $\angle C$.

4. Рис. 677.
Найти: $\angle AOD$, $\angle ACD$.

5. Рис. 678.
Найти: $\angle ABC$.

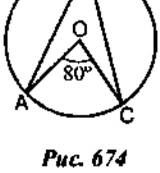


Рис. 674

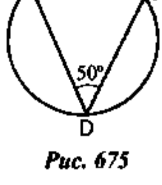


Рис. 675

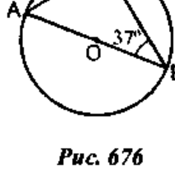


Рис. 676

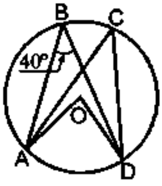


Рис. 677

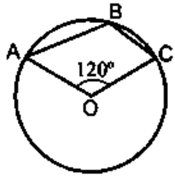


Рис. 678

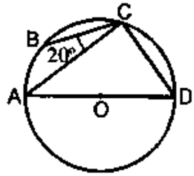


Рис. 679

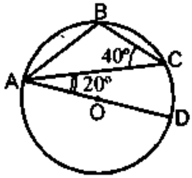


Рис. 680

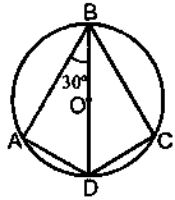


Рис. 681

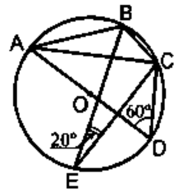


Рис. 682

6. Рис. 679.
   Найти: $\angle BCD$.
7. Рис. 680.
   Найти: $\angle BAC$.
8. Рис. 681. *Найти*: $\angle ADC$.
9. Рис. 682. *Найти*: $\angle BAD$.

Ответы к задачам на готовых чертежах

1. $\angle ABC = 40°$. **2.** $\angle ABC = 130°$.
3. $\angle A = 53°$, $\angle C = 90°$. **4.** $\angle AOD = 80°$, $\angle ACD = 40°$.
5. $\angle ABC = 120°$. **6.** $\angle BCD = 110°$.
7. $\angle BAC = 30°$. **8.** $\angle ADC = 120°$.
9. $\angle BAD = 50°$.

III. Изучение нового материала

1. Решить задачу с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала (рис. 683):

Доказать: $\Delta AEC \sim \Delta DEB$.

Найти AE, если $BE = 4$ см; $DE = 6$ см, $CE = 2$ см.

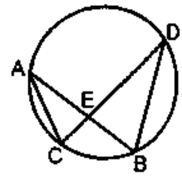


Рис. 683

2. Доказательство теоремы об отрезках пересекающихся хорд можно провести в виде задачи:

Докажите, что если две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, то $AE \cdot BE = CE \cdot DE$.

Задачу предложить решить самостоятельно, а затем обсудить ее решение. В тетрадях и на доске записать план-конспект доказательства теоремы.

План-конспект

Рис. 684.

а) $\Delta ACE \sim \Delta DBE$ ($\angle A = \angle D$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу BC; $\angle AEC = \angle DEB$ как вертикальные).

б) $\dfrac{AE}{DE} = \dfrac{CE}{BE} \Rightarrow AE \cdot BE = CE \cdot DE.$

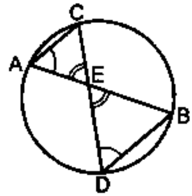


Рис. 684

Вопросы для обсуждения:

– Что вы можете сказать об углах CAB и CDB? А об углах AEC и DEB?
– Какими являются треугольники ACE и DBE? Чему равно отношение их сторон, являющихся отрезками хорд касательных?
– Какое равенство можно записать из равенства двух отношений, используя основное свойство пропорций?

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить самостоятельно задачи № 93, 94 с последующим обсуждением.

Задача № 93

Решение:

Хорды KM и PT пересекаются, следовательно, произведение отрезков хорды KM равно произведению отрезков хорды PT, то есть $PC \cdot TC = KC \cdot MC$.

Обозначим длину отрезка PC буквой x, тогда $CT = 16 - x$, следовательно, $x \cdot (16 - x) = 7 \cdot 4$. Корни полученного квадратного уравнения $x^2 - 16 \cdot x + 28 = 0$ равны 2 и 14.

Итак, либо $PC = 2$, и тогда $CT = 14$, либо $PC = 14$, и тогда $CT = 2$.

Ответ: $PC = 2$ см, $CT = 14$ см и $PC = 14$ см, $CT = 2$ см.

Задача № 94

Решение:

Если точка H лежит на данной окружности, то отрезки AB и CH являются хордами этой окружности, пересекающимися в точке M. Поэтому должно быть верным равенство $AM \cdot BM = MH \cdot CM$. Но так как $5 \cdot 6 \neq 8 \cdot 4$, то точка H не лежит на данной окружности.

Ответ: не лежит.

2. Разобрать всем классом задачи № 667, 670.

Задача № 667 (рис. 685)

ΔOBB_1 равнобедренный. $OC \perp BB_1 \Rightarrow$ является высотой и медианой ΔOBB_1, то есть $BC = B_1C$. AA_1 и BB_1 – хорды, пересекающиеся в точке $C \Rightarrow A_1C \cdot AC = B_1C \cdot BC$.

Т. к. $B_1C = BC$, то $BC^2 = 8 \cdot 4 = 32$,

$BC = 4\sqrt{2}$ см, а $BB_1 = 8\sqrt{2}$ см.

Ответ: $8\sqrt{2}$ см.

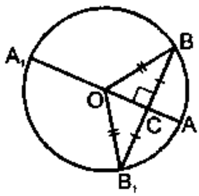


Рис. 685

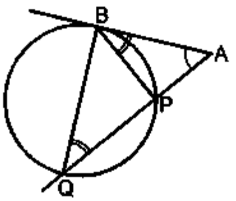


Рис. 686

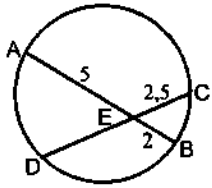


Рис. 687

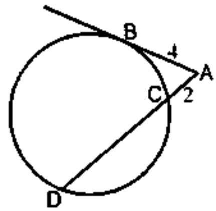


Рис. 688

Наводящие вопросы:

- Что вы можете сказать о ΔBB_1O?
- Рассмотрим хорды AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке C. Каким свойством обладают отрезки, полученные при пересечении этих хорд?

Задача № 670 (рис. 686)

$\Delta ABP \sim \Delta BAQ$ по двум углам ($\angle BQP = \angle ABP = \frac{1}{2}\cup BP$, $\angle A$ – общий) $\Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{AQ}{AB} \Rightarrow AB^2 = AP \cdot AQ$.

Наводящие вопросы:

- Подобны ли ΔABP и ΔBAQ? Почему?
- Чему равно отношение их сходственных сторон?

3. Решить самостоятельно задачи № 666 а), 671 а).

Задача № 666 (а)

Краткое решение (рис. 687):

$$AE \cdot BE = CE \cdot DE \Rightarrow DE = \frac{AE \cdot BE}{CE} = \frac{5 \cdot 2}{2,5} = 4.$$

Ответ: $DE = 4$.

Задача № 671 (а)

Краткое решение (рис. 688):

$$AB^2 = AC \cdot AD \Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{16}{2} = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = AD - AC = 8 - 2 = 6 \text{ (см)}$$

Ответ: 6 см.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 71 (с. 173), вопрос 14;

Решить задачи № 666 б), в), 671 б), 660, 668.

Урок 57
Решение задач по теме «Центральные и вписанные углы»

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по теме «Центральные и вписанные углы».
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

К доске вызываются 3 ученика: первый готовит доказательство теоремы; второй – решение задачи № 660; третий – решение задачи № 668. В это время учащиеся работают в рабочих тетрадях.

Теоретический опрос

Сформулировать и доказать теорему о произведении отрезков пересекающихся хорд.

Проверка домашнего задания

Проверить домашние задачи № 660, 668.

Задача № 660

Решение (рис. 689):

$\angle CBD$ – вписанный, опирающийся на дугу CD, равную $100° \Rightarrow \angle CBD = 50°$.

$\angle CBD$ – внешний угол $\Delta ABD \Rightarrow \angle CBD = \angle BAD + \angle BDA \Rightarrow \angle BDA = \angle CBD - \angle BAD = 50° - 32° = 18°$.

$\angle BDA = \angle BDE = 18°$. $\angle BDE$ – вписанный угол $\Rightarrow \angle BDE = \dfrac{1}{2}\smile BE \Rightarrow \smile BE = 36°$.

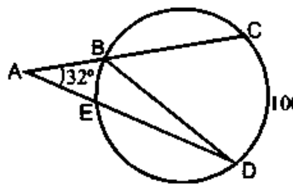


Рис. 689

Ответ: 36°.

Наводящие вопросы:

- Каким является $\angle CBD$ и чему равна его величина (по отношению к окружности и по отношению к ΔABD)?
- Чему равен $\angle BDA$? А величина дуги BE?

Задача № 668

Решение (рис. 690):

Построим ΔABC. Он прямоугольный, так как $\angle ABC$ опирается на диаметр. BD – высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла $\Rightarrow BD$ есть

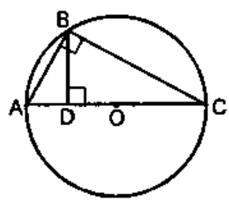


Рис. 690

среднее пропорциональное для отрезков, на которые делится гипотенуза этой высотой, т. е. $BD = \sqrt{AD \cdot DC}$.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о ΔABC?
– Чем для ΔABC является BD?
– Каким свойством обладает высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла?

Работа в рабочих тетрадях

Решить самостоятельно задачи № 90, 92 с последующим обсуждением. Заслушать учащихся, работавших у доски.

III. Решение задач

1. Разобрать решение задачи № 669.

Задача № 669 (рис. 691)

Построить: отрезок $AB = \sqrt{MN \cdot PK}$.

Построение:

а) на прямой построить отрезок AB, равный сумме длин отрезков MN и PK;
б) построить середину отрезка AB – точку O;
в) построить окружность с центром в точке O и радиусом, равным AO;
г) построить перпендикуляр к отрезку AB через точку Q, лежащую на отрезке AB так, что $AQ = MN$, $BQ = PK$;
д) построить точку пересечения данного перпендикуляра с построенной окружностью – точку E; отрезок QE – искомый.

2. Решить самостоятельно с последующей проверкой задачи № 662, 664.

Задача № 662

Решение (рис. 692): $\angle ACD$ – вписанный угол, следовательно, $\angle ACD = \frac{1}{2} \cup AD = 26°$. $\angle CAB$ – вписанный угол $\Rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2} \cup CB = 35°$.

$\angle BEC$ – внешний угол $\Delta AEC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BEC = \angle CAE + \angle ACE = 26° + 35° = 61°$.

Ответ: $\angle BEC = 61°$.

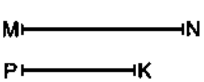


Рис. 691

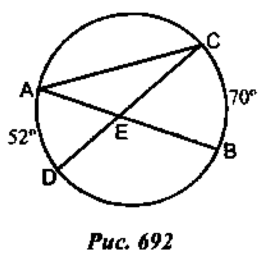


Рис. 692

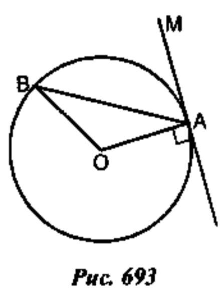


Рис. 693

Задача № 664

Краткое решение (рис. 693):

ΔAOB – равнобедренный $\Rightarrow \angle A = \angle B$, $\angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle B \Rightarrow$ $\cup AB = \angle AOB = 180° - 2 \cdot \angle B$. $OA \perp AM$ по свойству касательной $\Rightarrow$ $\angle OAM = 90° \Rightarrow \angle MAB = \angle OAM - \angle OAB = 90° - \angle B$.

Т. к. $\angle MAB = 90° - \angle B$, $\cup AB = 180° - 2 \cdot \angle B$, то $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$.

IV. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

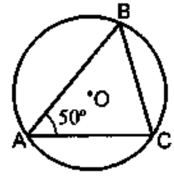


Рис. 694

1. Рис. 694.

Дано: $\cup AB : \cup AC = 3 : 2$, $\angle A = 50°$.

Найти: $\angle B$, $\angle C$, $\angle BOC$.

2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. Найдите CD, если $AE = 4$ см, $BE = 9$ см, а длина CE в четыре раза больше длины DE.

II вариант

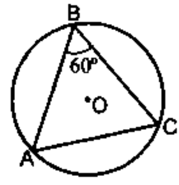


Рис. 695

1. Рис. 695.

Дано: $\angle B = 60°$, $\cup AB : \cup BC = 7 : 5$.

Найти: $\angle A$, $\angle C$, $\angle AOC$.

2. Хорды MN и KP пересекаются в точке T. Найдите BN, если $KT = 6$ см, $PT = 8$ см, а длина MT в три раза меньше длины NT.

II уровень

I вариант

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O, $\angle AOC = 80°$, $\angle C : \angle A = 3 : 4$. Найдите градусные меры дуг AB, AC, BC.

2. Хорды AB и CD пересекаются в точке E. $AE = 8$ см, $BE = 6$ см, $CD = 16$ см. В каком отношении точка E делит отрезок CD?

II вариант

1. Вершины треугольника ABC лежат на окружности с центром O, $\angle A = 60°$, $\angle AOB : \angle AOC = 3 : 5$. Найдите неизвестные углы треугольника.

2. Хорды MN и PT пересекаются в точке K. $ME = 8$ см, $NE = 9$ см, $PT = 18$ см. В каком отношении точка K делит отрезок PT?

III уровень

I вариант

1. Окружность с центром O касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC в точках M, N, K соответственно. Найдите $\cup MN$, $\cup NK$, $\cup MK$ и углы ΔMNK, если $\angle ABC = 62°$, $\angle ACB = 68°$.

2. Точка C делит хорду AB на отрезки 15 см и 8 см. Найдите диаметр окружности, если расстояние от точки C до центра окружности равно 1 см.

II вариант

1. Окружность с центром O касается сторон MN, NK и MK треугольника MNK в точках A, B, C соответственно. Найдите $\cup AB$, $\cup BC$, $\cup AC$ и углы треугольника ABC, если $\angle MNK = 72°$, $\angle NKM = 64°$.

2. Хорда AB делится точкой C на отрезки 9 см и 12 см. Найдите расстояние от центра окружности до точки C, если диаметр окружности равен 24 см.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

I уровень: решить задачу № 91 из рабочей тетради и задачи № 661, 663, 673 из учебника.

II уровень: решить задачи № 661, 663, 672, 673 учебника.

Урок 58
Свойство биссектрисы угла

Цели урока:

- Рассмотреть свойство биссектрисы угла и показать его применение при решении задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ ошибок самостоятельной работы

а) Сообщить общие замечания и рекомендации по задачам самостоятельной работы.

б) Составить план решения задач, с которыми не справились большинство учащихся.

Работа над ошибками

На доске выписать ответы задач самостоятельной работы.

I уровень

I вариант

1. $\angle B = 52°$, $\angle C = 75°$, $\angle BOC = 100°$.

2. $CD = 15$ см.

II вариант

1. $\angle C = 70°$, $\angle A = 50°$, $\angle AOC = 120°$.
2. $MN = 16$ см.

II уровень

I вариант

1. $\cup AC = 80°$, $\cup AB = 120°$, $\cup BC = 160°$.
2. 1 : 3.

II вариант

1. $\angle C = 45°$, $\angle B = 75°$.
2. 1 : 2.

III уровень

I вариант

1. $\cup MK = 130°$, $\cup MN = 118°$, $\angle NK = 112°$, $\angle MNK = 65°$, $\angle KMN = 56°$, $\angle MKN = 59°$.
2. 22 см.

II вариант

1. $\cup AB = 108°$, $\cup BC = 116°$, $\cup AC = 136°$, $\angle ACB = 54°$, $\angle ABC = 68°$, $\angle BAC = 58°$.
2. 6 см.

Работа над ошибками проводится самостоятельно, в это время учитель оказывает индивидуальную помощь наиболее слабо подготовленным учащимся, а также проверяет домашнее задание у части учащихся.

Решение задач по готовым чертежам с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала

1. Рис. 696. *Доказать*: $BC = DC$.
2. Рис. 697.
   Доказать: точка M равноудалена от точек A и B.
3. Рис. 698.
   Доказать: AC – биссектриса $\angle BAD$.

III. Изучение нового материала

1. Рассмотреть теорему, выражающую свойство биссектрисы угла.

Теорема: Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.

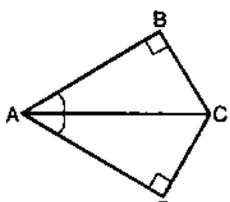


Рис. 696

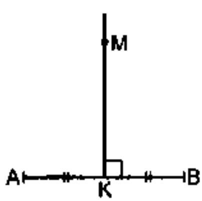


Рис. 697

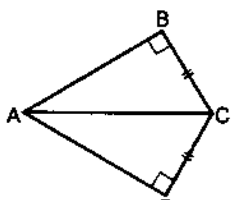


Рис. 698

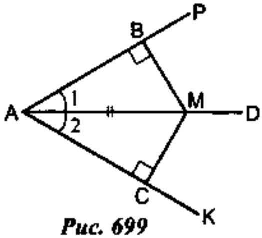


Рис. 699

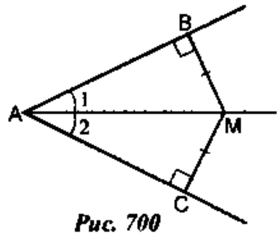


Рис. 700

Задание учащимся:

1) Выделите условие и заключение теоремы.

2) Докажите теорему самостоятельно.

Заслушать варианты доказательств и выбрать среди них наиболее рациональный. На доске и в тетрадях записать план-конспект доказательства теоремы.

План-конспект

Рис. 699.

Дано: AD – биссектриса угла A, $M \in AD$, $MB \perp AP$, $MC \perp AK$.

Доказать: $BM = CM$.

Доказательство:

а) $\Delta ABM = \Delta ACM$ ($\angle ABM = \angle ACM = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$, AM – общая сторона).

б) $BM = CM$.

2. Рассмотреть теорему, обратную свойству биссектрисы угла.

Задание учащимся: сформулировать теорему, обратную свойству биссектрисы угла и выяснить справедливость полученного утверждения.

Теорема: Каждая точка, лежащая внутри угла и равноудаленная от сторон угла, лежит на его биссектрисе.

Вызвать к доске одного из учащихся для доказательства теоремы.

Дано: M лежит внутри BAC, $MB = MC$, $MB \perp AB$, $MC \perp AC$.

Доказать: AM – биссектриса $\angle BAC$.

Доказательство (рис. 700): $\Delta ABM = \Delta ACM$ по гипотенузе и катету ($\angle ABM = \angle ACM = 90°$, так как $MB \perp AB$ и $MC \perp AC$, AM – общая гипотенуза, $MB = MC$ по условию) $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$, т. е. AM – биссектриса $\angle BAC$.

3. Рассмотреть следствие из теоремы о биссектрисе угла. Доказывает ее сам учитель.

Следствие: Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы ΔABC.

Доказать: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = 0$.

Доказательство (рис. 701): Пусть $AA_1 \cap BB_1 = 0$. Т. к. O лежит на биссектрисе AA_1, то она равноудалена от сторон $\angle BAC$, т. е. $OM = ON$.

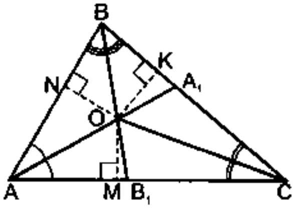


Рис. 701

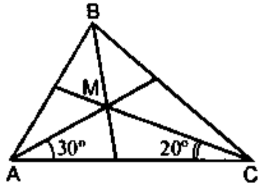


Рис. 702

Так как O лежит на биссектрисе BB_1, то она равноудалена от сторон $\angle ABC$, т. е. $ON = OK$.

Так как $OM = ON$ и $ON = OK$, то $OM = OK$, т. е. точка O равноудалена от сторон угла ACB, т. е. CO – биссектриса $\angle ACB \Rightarrow$ все 3 биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 95 устно, задачи № 97, 98 – самостоятельно с последующим обсуждением.

Задача № 97 (рис. 702)

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, луч BM – биссектриса угла ABC, и $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC$.

По условию задачи лучи AM и CM – биссектрисы углов A и C, поэтому $\angle A = 2 \cdot 30° = 60°$, $\angle C = 2 \cdot 20° = 40°$.

Тогда, $\angle B = 180° - (\angle BAC + \angle ACB) = 180° - (60° + 40°) = 80°$, значит $\angle ABM = \frac{1}{2}\angle ABC = 40°$.

Ответ: $\angle ABM = 40°$.

Задача № 98

По условию задачи луч KO является биссектрисой угла CKE, поэтому точка O равноудалена от сторон этого угла, то есть от прямых KC и KE.

Расстоянием от точки O до прямой CK является длина перпендикуляра OM, проведенного из точки O к этой прямой, то есть расстояние от точки O до прямой CK равно 7 см. Поэтому расстояние от точки O до прямой KE равно 7 см.

Ответ: 7 см.

2. Решить самостоятельно задачи № 676 а), 678 а), 674.

Учитель оказывает индивидуальную помощь менее подготовленным учащимся.

Задача № 676 (а)

Краткое решение (рис. 703): $OB = OC = r = 5$ см, $OB \perp AB$, $OC \perp AC$ по свойству касательной. Таким образом, AO – биссектриса $\angle BAC$, т. е. $\angle 1 = \angle 2 = 30°$.

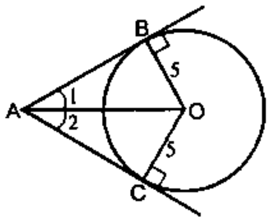


Рис. 703

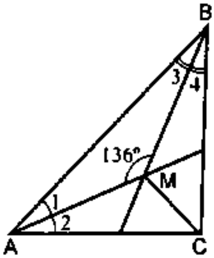


Рис. 704

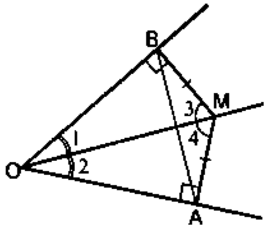


Рис. 705

Следовательно, $AO = 2OB = 10$ (см).

Ответ: 10 см.

Задача № 678 (а)

Краткое решение (рис. 704):

Так как AM и BM – биссектрисы, то $\angle 1 = \angle 2 = x$, $\angle 3 = \angle 4 = y$, тогда в ΔABM $x + y + 136° = 180° \Rightarrow x + y = 44°$.

$\angle A + \angle B = 2x + 2y = 2(x + y) = 2 \cdot 44° = 88°$.

В ΔABC $\angle A + \angle B + \angle C = 180° \Rightarrow \angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - 88° = 92°$.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке $\Rightarrow$ CM также биссектриса, т. е. $\angle ACM = \angle BCM = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2} \cdot 92° = 46°$.

Ответ: $\angle ACM = \angle BCM = 46°$.

Задача № 674

Краткое решение (рис. 705):

Так как OM – биссектриса $\angle BOA$, то точка M равноудалена от сторон угла BOA, т. е. $BM = AM \Rightarrow \Delta ABM$ – равнобедренный.

$\Delta OBM = \Delta OAM$ по гипотенузе и катету $\Rightarrow \angle 3 = \angle 4$, т. е. MO – биссектриса $\angle BMA$.

В равнобедренном ΔABM биссектриса MK, проведенная к его основанию, является его высотой $\Rightarrow MK \perp AB \Rightarrow MO \perp AB$.

Дополнительная задача

В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) AD – биссектриса, $CD = 6$ см, $AB = 15$ см. Найдите площадь треугольника ADB.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся на уроке.

Домашнее задание

П. 72 (до серединного перпендикуляра), вопросы 15, 16;

Решить задачи № 675, 676 б), 678 б), 677.

Урок 59
Серединный перпендикуляр

Цели урока:

- Ввести понятие серединного перпендикуляра и рассмотреть теорему о серединном перпендикуляре.
- Показать применение теоремы о серединном перпендикуляре при решении задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

К доске вызвать трех учащихся для доказательства теорем. В это время класс решает устно задачу № 96 из рабочей тетради, а затем все слушают доказательства теорем.

Теоретический опрос

а) Сформулировать и доказать теорему о биссектрисе угла.

б) Сформулировать и доказать теорему, обратную теореме о биссектрисе угла.

В) Сформулировать и доказать следствие из теоремы о биссектрисе угла.

Задача № 96 (рис. 706)

а) Точка A лежит на биссектрисе ME угла TMP, поэтому она равноудалена от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке A верно.

б) Точка B лежит на биссектрисе ME угла TMP, поэтому она равноудалена от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке B неверное.

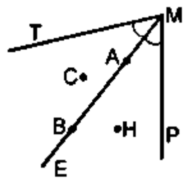


Рис. 706

в) Если бы точка H была равноудалена от сторон угла TMP, то она лежала бы на биссектрисе ME этого угла. Но точка H не лежит на биссектрисе угла TMP. Следовательно, данное утверждение о точке H неверное.

г) Если бы точка C была равноудалена от сторон угла TMP, то она лежала бы на биссектрисе этого угла.

Следовательно, данное утверждение о точке C верное.

Решение задач на готовых чертежах

1. Рис. 707. *Дано*: $BE = 4$, $BM = 5$.
   Найти: MK.
2. Рис. 708. *Найти*: $\angle ADB$.
3. Рис. 709. *Дано*: $AB = BC$. *Доказать*: $BM \perp AC$.

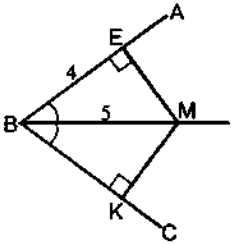


Рис. 707

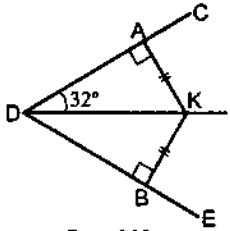


Рис. 708

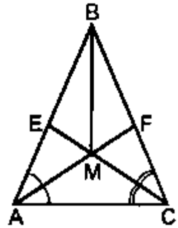


Рис. 709

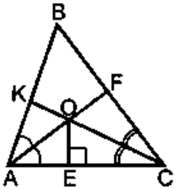


Рис. 710

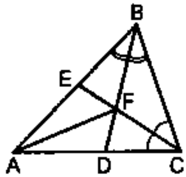


Рис. 711

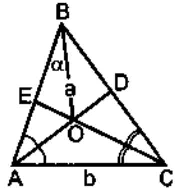


Рис. 712

4. Рис. 710. *Дано*: $OE = 5$.
Найти расстояние от точки O до прямых AB и BC.

5. Рис. 711. *Дано*: $AC = 14$, $AB = 16$, $S_{ACF} = 28$, $BC = 12$.
Найти: S_{ABF}, S_{BCF}.

6. Рис. 712.
Найти: S_{AOC}.

Решение задач можно организовать самостоятельно с последующим обсуждением тех, которые вызвали затруднения у большинства учащихся.

По необходимости можно предложить менее подготовленным учащимся решить задачи № 1–4, более подготовленным – задачи № 3–6. В это время учителю можно у отдельно взятых учащихся проверить домашние задачи № 675, 677.

Задача № 675

Краткое решение (рис. 713):

Так как окружности имеют общую касательную в точке A, то $O_1A \perp p$ и $O_2A \perp p \Rightarrow O_1O_2 = O_1A + O_2A$, т. е. A лежит на O_1O_2.

$O_1K \perp OK$, $O_1M \perp OM$, $O_1K = O_1M = r_1 \Rightarrow O_1$ лежит на биссектрисе $\angle O$.

$O_2N \perp ON$, $O_2F \perp OF$, $O_2N = O_2F = r_2 \Rightarrow O_2$ лежит на биссектрисе $\angle O$.

Так как O_1 и O_2 лежат на биссектрисе $\angle O$, $A \in O_1O_2$, то $O_1, O_2 \in OA$.

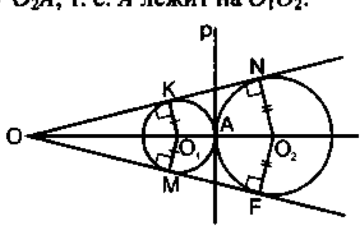


Рис. 713

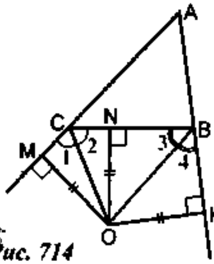


Рис. 714

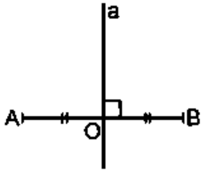


Рис. 715

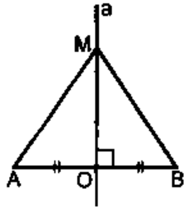


Рис. 716

Задача № 677

Краткое решение (рис. 714):

Опустим перпендикуляры OM, ON и OK к сторонам AC, AB, CB.

$\Delta OMC = \Delta ONC$ по гипотенузе и острому углу (OC – общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle M = \angle N = 90°$) $\Rightarrow OM = ON$.

$\Delta OBN = \Delta OBK$ по гипотенузе и острому углу (OB – общая гипотенуза, $\angle 3 = \angle 4$, $\angle N = \angle K = 90°$) $\Rightarrow ON = OK$.

Так как $OM = ON = OK$,

$OM \perp CM$, $ON \perp CB$, $OK \perp BC$, то окружность с центром O и радиусом ON касается прямых CM, CB и BK.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие серединного перпендикуляра, используя рисунок, заготовленный на доске или на плакате (рис. 715).

Определение: Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

Прямая a – серединный перпендикуляр к отрезку AB, если:

1) $a \perp AB$;

2) $AO = BO$ ($O = a \cap AB$).

2. Рассмотреть теорему о серединном перпендикуляре.

Доказательство теоремы можно предложить учащимся провести в группах после того, как она будет сформулирована учителем, подготовлен рисунок на доске и записаны условие (то, что дано) и заключение (что доказать) теоремы по каждой части теоремы.

Теорема: Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.

К I части теоремы (рис. 716):

Дано: M – произвольная точка прямой a, a – серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Доказать: $MA = MB$.

Ко II части теоремы (рис. 717):

Дано: $MA = MB$, прямая a – серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Доказать: точка M лежит на прямой a.

Варианты доказательств заслушать и обсудить.

Краткий план доказательства записать на доске и в тетрадях учащихся.

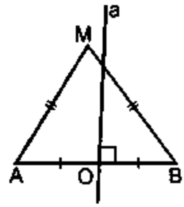


Рис. 717

План доказательства I части

1) Если $M \in AB$, то M совпадает с точкой $O \Rightarrow$ $\Rightarrow MA = MB$.
2) Если $M \notin AB$, то $\Delta AMO = \Delta BMO$ по двум катетам ($OA = BO$, MO – общий катет) $\Rightarrow MA = MB$.

План доказательства II части

1) ΔAMB – равнобедренный $\Rightarrow$ MN (высота ΔAMB) – медиана $\Delta AMB \Rightarrow AH = HB$.
2) $AH = HB$, $AO = OB$; $H, O \in AB \Rightarrow H$ и O совпадают.
3) Через точку O к прямой AB можно провести только один перпендикуляр $\Rightarrow MN$ и a совпадают $\Rightarrow M \in a$.

3. Сформулировать следствие из теоремы о серединном перпендикуляре и доказать его самому учителю.

Следствие: Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство (рис. 718): Пусть серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекаются в точке O. (Они не могут не пересекаться, так как в этом случае $MO \parallel NO \Rightarrow AB \parallel BC$, что невозможно.)

По свойству серединного перпендикуляра имеем: $OA = OB$ и $OB = OC \Rightarrow$ $OA = OC \Rightarrow$ по II части теоремы о серединном перпендикуляре точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку $AC \Rightarrow$ серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

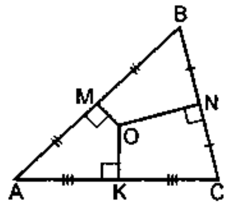


Рис. 718

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 99 устно, задачу № 100 – самостоятельно с последующим обсуждением.

Задача № 99

Прямая называется серединным перпендикуляром к отрезку, если она проходит через середину этого отрезка и перпендикуляра к нему.

По условию задачи $BM = MC$, но прямая AM не перпендикулярна к отрезку BC, так как в противном случае отрезок AM был бы медианой и высотой треугольника ABC, а тогда были бы равны стороны AB и AC, что неверно. Следовательно, прямая AM не является серединным перпендикуляром к стороне BC.

По условию задачи $BT \perp AC$, то $AT \neq CT$, так как в противном случае отрезок BT был бы высотой и медианой треугольника ABC, а тогда были бы равны стороны AB и BC, что неверно. Следовательно, прямая BT не является серединным перпендикуляром к стороне AC.

По условию задачи $\angle ACO = \angle BCO$ и $AC = BC$, то есть отрезок CO является биссектрисой равнобедренного треугольника, а потому он является также его медианой и высотой. Следовательно, прямая CO проходит через середину отрезка AB и перпендикуляра к этому отрезку, то есть является серединным перпендикуляром к стороне AB.

Ответ: серединным перпендикуляром к стороне треугольника ABC является прямая CO.

Задача № 100

Доказательство: Так как прямая p – серединный перпендикуляр к отрезку AB, то $AO = OB$. Аналогично, так как прямая q – серединный перпендикуляр к отрезку BC, то $OB = OC$.

Итак, $AO = OB = OC$, т. е. $AO = OC$, что и требовалось доказать.

2. Разобрать коллективно задачи № 680 а), 686.

Задача № 680 а)

Серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника, пересекаются в одной точке, следовательно, точка D принадлежит серединному перпендикуляру, проведенному к стороне BC. Точка D лежит на стороне BC и на серединном перпендикуляре, проведенном к ней, значит она является серединой стороны BC.

Наводящие вопросы:

– Сформулируйте свойство серединного перпендикуляра к отрезку.
– Каково взаимное расположение серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника?
– Какой вывод следует из того, что точка D лежит на стороне BC и на серединном перпендикуляре, проведенном к ней?

Задача № 686

Прочитать решение задачи по учебнику, решение задачи обсудить.

Вопросы для обсуждения

– Почему точки M_1 и M_2 равноудалены от концов отрезка AB?
– На основании какой теоремы, если точка M_1 равноудалена от концов отрезка AB, то она лежит на серединном перпендикуляре к нему?
– Почему $M_1M_2 \perp AB$?

3. Решить самостоятельно задачи № 679 а), 687.

Задача № 679 (а)

Краткое решение (рис. 719):

$\Delta BDH = \Delta CDH$ по двум катетам $\Rightarrow BD = DC = 5$ см $\Rightarrow AD = AC - 5 = 3{,}5$ (см).

Ответ: $AD = 3{,}5$ см, $DC = 5$ см.

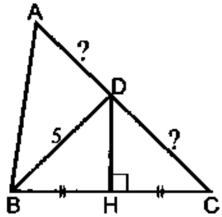


Рис. 719

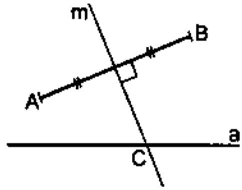


Рис. 720

Задача № 687

Краткое решение (рис. 720):

1) Построить отрезок AB и серединный перпендикуляр m к нему.

2) $m \cap a = C$. C – искомая точка.

Доказательство: m – серединный перпендикуляр $\Rightarrow CA = CB$.

$C \in a \Rightarrow C$ – точка прямой a, равноудаленная от A и B.

V. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 72, вопросы 17, 18, 19; Решить задачи:

I уровень: № 102 (из рабочей тетради), № 679 б), 680 б), 681 (из учебника).

II уровень: № 679 б), 680 б), 681, дополнительную задачу.

Дополнительная задача

В остроугольном треугольнике ABC серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC пересекаются в точке D, $DC = 5$ см. Найдите расстояния от точки D до сторон треугольника, если периметр треугольника ABC равен 18 см, $AB : BC : AC = 4 : 3 : 2$.

Урок 60

Теорема о точке пересечения высот треугольника

Цели урока:

- Рассмотреть теорему о точке пересечении высот треугольника и показать ее применение при решении задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

К доске вызываются два ученика для доказательства теорем. Остальные учащиеся проверяют домашнюю задачу, а затем работают в рабочих тетрадях. Доказательства теорем проверяет учитель, работая индивидуально с учеником.

Теоретический опрос

а) Сформулируйте и докажите теорему о серединном перпендикуляре к отрезку.

б) Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Проверка домашнего задания

Проверить домашнюю задачу № 102 из рабочей тетради (устно).

Решение задач

Решить задачу № 101 из рабочей тетради (самостоятельно).

Задача № 101

а) Точка A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CE, следовательно, она равноудалена от концов этого отрезка, то есть данное утверждение о точке A верно.

б) Точка M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CE, поэтому она равноудалена от концов отрезка CE, а значит, расстояния от нее до точек C и E равны, то есть данное утверждение о точке M неверное.

в) Если бы точка H была равноудалена от точек C и E, то она лежала бы на серединном перпендикуляре к отрезку CE, но это не так, и поэтому данное утверждение о точке H неверное.

г) Если бы точка T была удалена на равные расстояния от точек C и E, то она лежала бы на серединном перпендикуляре к отрезку CE, что в данном случае не выполняется. Следовательно, данное утверждение о точке T верно.

Собрать рабочие тетради на проверку.

Решение задач на готовых чертежах

(Самостоятельно с последующим обсуждением тех задач, с которыми не справились большинство учащихся. В это время учитель проверяет решение дополнительной домашней задачи.)

1. Рис. 721. *Дано*: $P_{ABO} = 8$ см.
   Найти: P_{ABC}.
2. Рис. 722. *Найти*: BO.
3. Рис. 723. *Найти*: S_{AOC}.

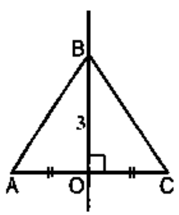


Рис. 721

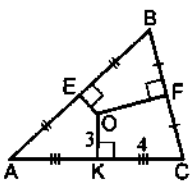


Рис. 722

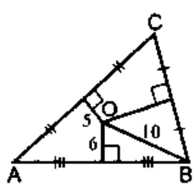


Рис. 723

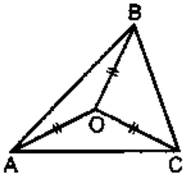


Рис. 724

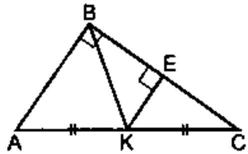


Рис. 725

4. Рис. 724. *Дано*: $AC = 24$, $S_{AOC} = 60$.
Найти: BO.

5. Рис. 725. *Дано*: $AC = 10$, $BC = 8$.
Найти: KE.

III. Изучение нового материала

– Какие элементы треугольника пересекаются в одной точке? (*Биссектрисы треугольника, серединные перпендикуляры к сторонам треугольника, медианы треугольника.*)

– В каком треугольнике совпадают точка пересечения биссектрис, точка пересечения медиан, точка пересечения серединных перпендикуляров? (*В равностороннем.*)

– Как вы думаете, пересекаются ли высоты треугольника в одной точке?

Возможные варианты ответов: а) да; б) только в остроугольном; в) в остроугольном и прямоугольном.

В ходе обсуждения выполнить рис. 726 а, б, в).

O – точка пересечения высот ΔABC или их продолжений.

1. Сформулировать и доказать теорему о точке пересечения высот треугольника.

Теорема: Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.

Дано: ΔABC, AA_1, BB_1, CC_1 – высоты ΔABC.
Доказать: $AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = O$.
Доказательство (рис. 727):

1) Проведем через точки $A_1B_1C_1$ прямые, параллельные AB, BC, AC.

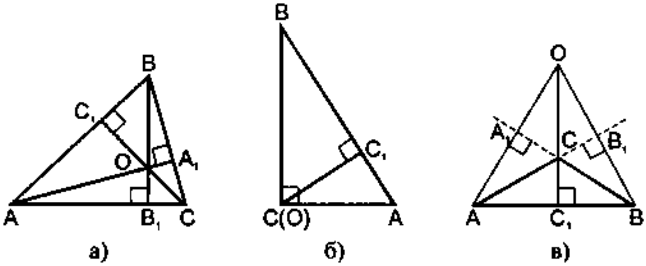


Рис. 726

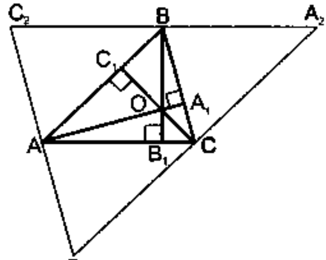


Рис. 727

2) $AB \parallel A_2B_2$, $AC \parallel A_2C_2 \Rightarrow ABA_2C$ – параллелограмм $\Rightarrow AB = A_2C$, $AC = BA_2$.
3) $ABCB_2$ – параллелограмм $\Rightarrow AB_2 = BC$, $AB = CB_2$.
4) AC_2BC – параллелограмм $\Rightarrow AC = C_2B$, $AC_2 = BC$.
5) $AB = A_2C = CB_2 \Rightarrow C$ – середина A_2B_2.
6) $AC = CB_2 = BA_2 \Rightarrow B$ – середина C_2A_2.
7) $BC = C_2A = AB_2 \Rightarrow A$ – середина B_2C_2.
8) $AA_1 \perp BC$, $BC \parallel B_2C_2$, A – середина $B_2C_2 \Rightarrow AA_1$ – серединный перпендикуляр к стороне B_2C_2 $\Delta A_2B_2C_2$.
9) $CC_1 \perp AB$, $AB \parallel A_2B_2$, C – середина $A_2B_2 \Rightarrow CC_1$ – серединный перпендикуляр к стороне A_2B_2 $\Delta A_2B_2C_2$.
10) $BB_1 \perp AC$, $AC \parallel A_2C_2$, C – середина $A_2C_2 \Rightarrow BB_1$ – серединный перпендикуляр к стороне A_2C_2 $\Delta A_2B_2C_2$.
11) Серединные перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 треугольника $A_2B_2C_2$ пересекаются в одной точке, а это значит, что высоты треугольника пересекаются в одиой точке.

2. Ввести понятие четырех замечательных точек треугольника с помощью таблицы.

Четыре замечательные точки треугольника

1. Точка пересечения медиан (рис. 728)

$$\frac{AM}{A_1M} = \frac{BM}{B_1M} = \frac{CM}{C_1M} = \frac{2}{1}.$$

2. Точка пересечения биссектрис (рис. 729)
$KL = KM = KN$.

3. Точка пересечения серединных перпендикуляров (рис. 730)
$AO = BO = CO$.

4. Точка пересечения высот – H (рис. 731)

IV. Закрепление изученного материала

1. Решить задачу № 103 из рабочей тетради.

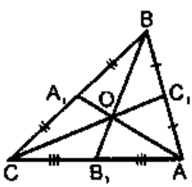


Рис. 728

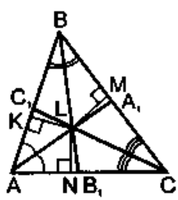


Рис. 729

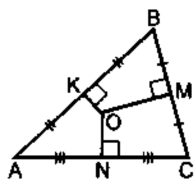


Рис. 730

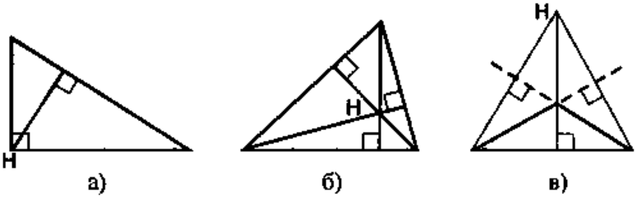


Рис. 731

Задача № 103

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, поэтому третья высота треугольника проходит через точку O. С помощью линейки проведем прямую CO и обозначим буквой T точку пересечения этой прямой AB. Отрезок CT – искомая высота ΔABC.

2. Разобрать задачи № 685, 684.

Задача № 685 (рис. 732)

Проведем прямую CM, $CM \cap AB = D$. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, значит, CD – высота ΔABC, т. е. $CD \perp AB$.

ΔABC – равнобедренный с основанием AB, поэтому высота CD является медианой, т. е. $AD = DB$.

Так как $CD = AB$, $AD = DB$, то CD (и CM) серединный перпендикуляр к стороне AB.

Наводящие вопросы:

– Пусть $CM \cap AB = D$. Чем является CD для треугольника ABC?
– Каким свойством обладает высота равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию?

Задача № 683 (рис. 733)

Если бы AM было высотой, то ΔABM и ΔACM были бы прямоугольными и равными по двум катетам, значит были бы равны стороны AB и AC треугольника ABC, что противоречит условию задачи.

Следовательно, AM не является высотой.

Наводящие вопросы:

– Какие изменения произошли бы в треугольнике ABC, если бы медиана AM являлась высотой?
– Как называется данный способ решения задач?

3. Решить самостоятельно задачи № 684, 682, 688.

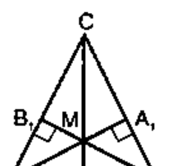


Рис. 732

Рис. 733

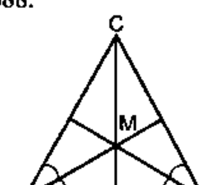


Рис. 734

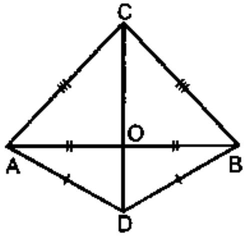


Рис. 735

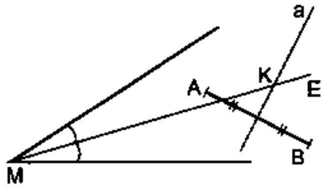


Рис. 736

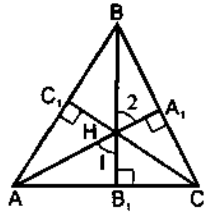


Рис. 737

Задача № 684

Краткое решение (рис. 734):

Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, CM – биссектриса $\angle ACB$.

Пусть $CM \cap AB = D$. Тогда CD – биссектриса, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, проведенная к его основанию $\Rightarrow CD$ – высота, т. е. $CD \perp AB \Rightarrow CM \perp AB$.

Задача № 682

Краткое решение (рис. 735):

Так как O – середина AB, то CO – медиана и высота равнобедренного ΔABC с основанием AB, а DO – медиана и высота равнобедренного ΔABD с основанием AB.

Так как $CO \perp AB$, $DO \perp AB$, то C, D, O лежат на одной прямой, т. е. $O \in CD$.

Задача № 688

Построение (рис. 736):

1) Построить биссектрису ME угла M.
2) Построить серединный перпендикуляр к отрезку AB – прямую a.
3) $a \cap ME = K$.

K – искомая точка.

4. При наличии времени решить дополнительные задачи.

Дополнительные задачи

Задача 1

В ΔABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H. Найдите высоту, проведенную к стороне AC, если $HA_1 = 3$, $BA_1 = 4$, $AH = 4$.

Решение (рис. 737):

$\Delta AHB_1 \sim \Delta BHA_1$ по двум углам ($\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle AB_1H = \angle BA_1H = 90°$) $\Rightarrow \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{B_1H}{A_1H} \Rightarrow B_1H = \dfrac{AH \cdot A_1H}{BH}$.

ΔA_1BH – прямоугольный, то теореме Пифагора:

$BH^2 = A_1H^2 + BA_1^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow$

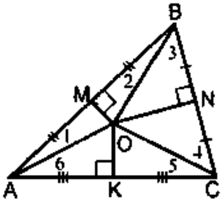


Рис. 738

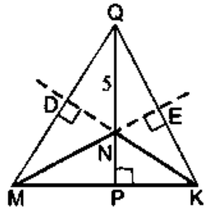


Рис. 739

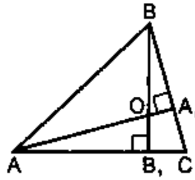


Рис. 740

$$BH = 5,\ B_1H = \frac{4\cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2{,}4.\ BB_1 = BH + B_1H = 5 + 2{,}4 = 7{,}4.$$

Ответ: 7,4.

Задача 2

Найдите углы треугольника, если его стороны из точки пересечения серединных перпендикуляров видны по углами 100°, 140°, 120°.

Решение (рис. 738):

MO, NO, OK – серединные перпендикуляры $\Rightarrow AO_1 = BO = CO$, то есть ΔAOB_1, ΔBOC, ΔAOC – равнобедренные и OM, ON и OK являются их биссектрисами.

$\angle AOB = 100° \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = (180° - 100°) : 2 = 40°$,

$\angle BOC = 120° \Rightarrow \angle 3 = \angle 4 = (180° - 120°) : 2 = 30°$,

$\angle AOC = 140° \Rightarrow \angle 5 = \angle 6 = (180° - 140°) : 2 = 20°$.

$\angle ABC = \angle 2 + \angle 3 = 70°$, $\angle BAC = \angle 1 + \angle 6 = 60°$,

$\angle ACB = \angle 4 + \angle 5 = 50°$.

Ответ: 50°, 60°, 70°.

Задача 3

В ΔMNK $\angle MNK$ тупой. Высоты MD и KE пересекаются в точке Q, $QN = 5$, $MK = 10$. Найдите площадь четырехугольника $MNKQ$.

Решение (рис. 739):

$S_{MNKQ} = S_{MQK} - S_{MNK} = MK \cdot QP : 2 - MK \cdot NP : 2 =$

$= MK \cdot (QP - NP) : 2 = MK \cdot NQ : 2 = 25.$ *Ответ*: 25.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить домашнюю проверочную работу.

I уровень

I вариант

1. Рис. 740. *Дано*: $\angle CAB = 42°$.

Найти: $\angle ACO$.

2. В треугольнике MNK биссектрисы пересекаются в точке O. Расстояние от точки O до стороны $MN = 6$ см, $NK = 10$ см. Найдите площадь треугольника NOK.

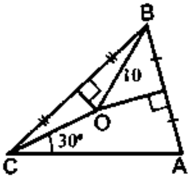


Рис. 741

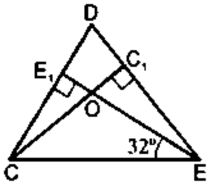


Рис. 742

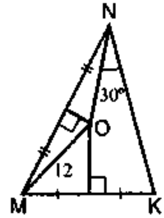


Рис. 743

II вариант

1. Рис. 741.
Найти расстояние от точки O до стороны AC.

2. В треугольнике MNK медианы MP и NE пересекаются в точке O и равны 12 и 15 см соответственно. Найдите площадь треугольника MOE, если $MP \perp NE$.

II уровень

I вариант

1. Рис. 742.
Найти: $\angle CDO$.

2. В треугольнике ABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O и равны 15 см и 18 см соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $\angle BOC = 90°$.

II вариант

1. Рис. 743.
Найти: S_{NOK}.

2. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников AOC и BOC, если $AC = 8$ см, $BC = 6$ см.

III уровень

I вариант

1. Рис. 744. *Дано*: $\angle AOB = 120°$, $AB = 12$.
Найти: OC.

2. Во внутренней области треугольника ABC взята точка O, равноудаленная от его сторон. Найдите угол AOC, если $\angle ABO = 39°$.

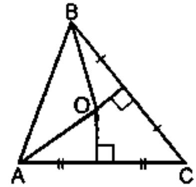


Рис. 744

II вариант

1. Рис. 745. *Дано*: $NN_1 = N_1K$.
Найти: $\angle OMN_1$.

2. В ΔABC медианы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O и взаимно перпендикулярны. Найдите OA, если $BB_1 = 36$ см, $CC_1 = 15$ см.

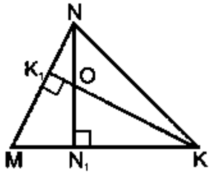


Рис. 745

Урок 61
Вписанная окружность

Цели урока:
- Ввести понятия вписанной и описанной окружностей.
- Рассмотреть теорему об окружности, вписанной в треугольник.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ домашней проверочной работы.

Ответы к задачам проверочной работы:

I уровень

I вариант	II вариант
1. 48°.	1. 5.
2. 30 см^2.	2. 20 см^2.

II уровень

I вариант	II вариант
1. 32°.	1. $18\sqrt{3}$.
2. $23+4\sqrt{34}+4\sqrt{61}$ см.	2. 4 : 3.

III уровень

I вариант	II вариант
11. $4\sqrt{3}$.	1. 45°.
2. 129°.	2. 26 см.

Решение задач на готовых чертежах с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1. Рис. 746. AB, AC – касательные, B, C – точки касания.
   $\angle BAC = 56°$, $OC = 4$ см.
   Найти: $\angle OAB$, OB.
2. Рис. 747. AB, BC, AC – касательные,
   $\angle BOC = 120°$, $\angle ABO = 25°$, $\angle AOC = 115°$.

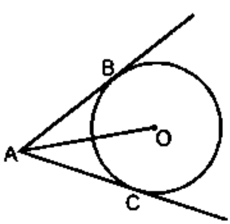


Рис. 746

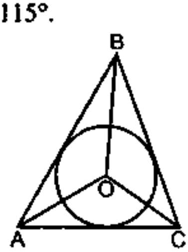


Рис. 747

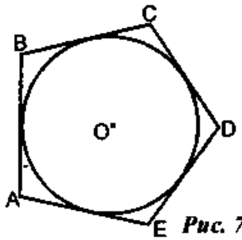


Рис. 748

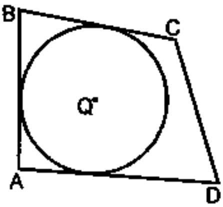


Рис. 749

Найти углы треугольника AOB.

Доказать: O – точка пересечения биссектрис ΔABC.

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие окружности, вписанной в многоугольник.

Определение: Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник – описанным около этой окружности.

Рис. 748. $ABCDE$ – описанный около окружности с центром O пятиугольник. Окружность с центром O вписана в пятиугольник $ABCDE$. AB, BC, CD, DE, AE касаются окружности.

Рис. 749. Окружность с центром Q не вписана в четырехугольник $ABCD$, т. к. CD не касается окружности.

2. Сформулировать и доказать теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема: В любой треугольник можно вписать окружность.

Для доказательства теоремы можно предложить учащимся решить задачу на построение самостоятельно, а затем варианты решений обсудить.

Задача: В данный треугольник впишите окружность.

В случае возникновения затруднений в ходе решения задачи учащимся можно задать наводящие вопросы:

– Каково взаимное расположение сторон треугольника и окружности?
– Укажите геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла A, B, C.
– Как найти центр вписанной в треугольник окружности?
– Чему равен радиус вписанной в треугольник окружности?
– Докажите, что данная окружность является вписанной в треугольник.

С доказательством самой теоремы учащиеся могут ознакомиться самостоятельно дома.

3. Рассмотреть замечание № 1: в треугольник можно вписать только одну окружность.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 104 (устно), 107 (разобрать всем классом), 108 (самостоятельно с последующим обсуждением решения).

Задача № 108 (рис. 750)

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H, M и E касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к касательной, то $OH \perp AC$, следовательно, отрезок OH – высота треугольника AOC. Аналогично отрезок OM – высота треугольника BOC, отрезок OE – высота треугольника AOB. Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OE$.

Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot OM$ и $S_{AOC} = \frac{1}{2}AC \cdot OH$.

Итак, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{AOC} = \frac{1}{2}(AB \cdot OE + BC \cdot OM + AC \cdot OH) =$

$= \frac{1}{2}(AB \cdot r + BC \cdot r + AC \cdot r) = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r = \frac{1}{2}P_{ABC} \cdot r =$
$= 60 : 2 \cdot 4 = 120$ см^2.

Ответ: 120 см^2.

2. Разобрать решение задачи № 690.

Задача № 690

Решение (рис. 751): $\Delta ABD \sim \Delta OBK$ по двум углам ($\angle K = \angle D$, $\angle B$ – общий) $\Rightarrow AB : OB = BD : BK = AD : OK$.

Пусть x – коэффициент пропорциональности, тогда так как $BO : OD = 12 : 5$, то $BO = 12x$, $OD = 5x$, $BD = 17x$. $KO = OD = 5x$. $AB =$ 60 см $\Rightarrow \frac{60}{12x} = \frac{17x}{BK} = \frac{AD}{5x} \Rightarrow AD = \frac{60 \cdot 5x}{12x} = 25$ см $\Rightarrow AC = 50$ см.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о треугольниках ABD и OBK?
– Сформулируйте свойство высоты, проведенной к основанию равнобедренного треугольника.

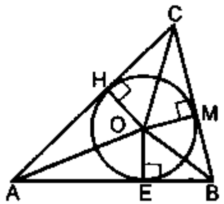


Рис. 750

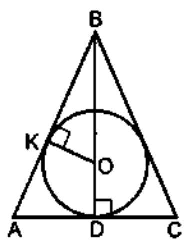


Рис. 751

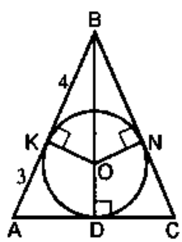


Рис. 752

3. Самостоятельно решить задачи № 691, 693 а) и дополнительную задачу при наличии времени.

Задача № 691

Краткое решение (рис. 752):

Так как AB, BC, AC – касательные, K, N, D – точки касания, то $AK = AD$, $CD = CN$, $BK = BN$.

Т. к. $AB = BC$, то $CN = CD = 3$ см $\Rightarrow P_{ABC} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 20$ см.

Ответ: 20 см.

Задача № 693 (а)

Решение (рис. 753): Так как гипотенуза равна 26 см, то $AN = x$ см, $BN = 26 - x$ (см).

$r = 4 \Rightarrow MO = MC = CK = KO = 4$ см (так как $MO = OK = 4$ см, $MO \perp BC$, $OK \perp AC \Rightarrow$ $CMOK$ – квадрат).

AC и BC – касательные $\Rightarrow AK = AN = x$ см, $BM = BN = 26 - x$ (см).

$P_{ABC} = (x + 4) + (4 + 26 - x) + 26 =$
$= 34 + 26 = 60$ (см).

Ответ: 60 см.

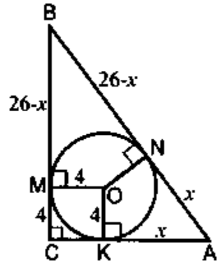


Рис. 753

Дополнительная задача

В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания, лежащая на гипотенузе, делит ее на отрезки, равные 4 и 6 см. Найдите площадь данного треугольника.

Решение (рис. 754):

$MONC$ – квадрат (см. задачу № 693 а).

Пусть $MC = CN = x$ см.

$BM = BK = 4$ см, $AK = AN = 6$ см как отрезки касательных, проведенных из одной точки.

ΔABC – прямоугольный, по теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, т. е. $(x + 4)^2 + (x + 6)^2 = 10^2$, откуда $x = -12$; $x = 2$.

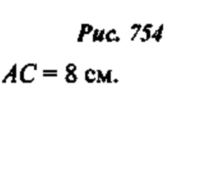


Рис. 754

Так как $x > 0$, то $MC = CN = 2$ см $\Rightarrow BC = 6$ см, $AC = 8$ см.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 8 : 2 \cdot 6 = 24 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 24 см^2.

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 74, вопросы 21, 22. Решить задачи № 689, 692, 693 (б), 694.

Урок 62

Свойство описанного четырехугольника

Цели урока:

- Совершенствовать навыки решения задач.

- Рассмотреть свойство описанного четырехугольника и показать его применение при решении задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Два ученика готовят теоретические вопросы у доски, остальные учащиеся выполняют тестовую работу.

Заслушать доказательства теорем можно после проверки ответов теста.

Теоретический опрос

а) Сформулировать и доказать теорему об окружности, вписанной в треугольник.

б) Доказать, что в треугольник можно вписать только одну окружность.

Тест с последующей самопроверкой

Ответы записать на двух листочках, один из которых сдается на проверку учителю.

I вариант

1. Центр вписанной в треугольник окружности совпадает с точкой пересечения его…
   а) медиан;
   б) биссектрис;
   в) серединных перпендикуляров.
2. Центр вписанной в треугольник окружности равноудален от…
   а) сторон;
   б) углов;
   в) вершин треугольника.
3. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения его медиан. Этот треугольник…
   а) прямоугольный;
   б) равнобедренный;
   в) равносторонний.
4. Окружность называется вписанной в многоугольник, если…
   а) все его стороны касаются окружности;
   б) все его вершины лежат на окружности;
   в) все его стороны имеют общие точки с окружностью.

II вариант

1. Радиус вписанной в треугольник окружности равен расстоянию от центра окружности до…
   а) сторон треугольника;

б) вершин треугольника;
в) углов треугольника.

2. Центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности может лежать…
а) на любой из его высот;
б) на одной из его медиан;
в) на любом из его серединных перпендикуляров.

3. Центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения его биссектрис. Этот треугольник может быть…
а) произвольным;
б) только равносторонним;
в) только прямоугольным.

4. Многоугольник называется описанным около окружности, если…
а) окружность имеет общие точки с его сторонами;
б) окружность проходит через его вершины;
в) окружность является касающейся всех его сторон.

Ответы к тесту

	1	2	3	4
I вариант	б	а	в	а
II вариант	а	б	а	в

Решение задач на готовых чертежах с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала (устно)

1. Рис. 755. *Дано*: M, N, K, P – точки касания. $ABCD$ – прямоугольная трапеция, $OK = 4{,}2$.
Найти: P_{ABCD}.

2. Рис. 756. *Найти* расстояние от точки E до прямых BC и AD.

III. Изучение нового материала

1. Объяснить, что не во всякий четырехугольник можно вписать окружность на примерах:

а) прямоугольник (см. рис. 757);

б) параллелограмм (см. рис. 758).

2. Сформулировать свойство описанного четырехугольника и предложить учащимся доказать его самостоятельно, а затем варианты доказательств заслушать и обсудить.

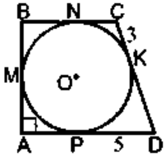


Рис. 755

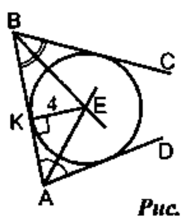


Рис. 756

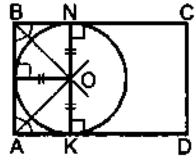


Рис. 757

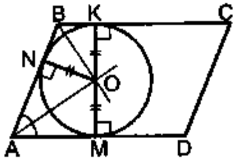


Рис. 758

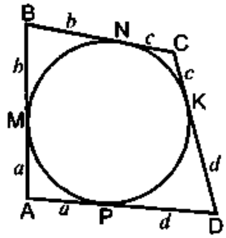


Рис. 759

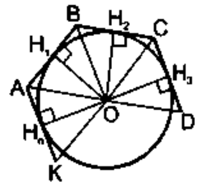


Рис. 760

Теорема: В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.

Доказательство (рис. 759): AB, BC, CD, AD – касательные $\Rightarrow$ отрезки касательных, проведенные из вершин четырехугольника, равны, т. е. $AM = AP = a$, $BM = BN = b$, $CN = CK = c$, $DP = DK = d \Rightarrow AB + CD = a + b + c + d$, $AD + BC = a + b + c + d \Rightarrow AB + CD = AD + BC$.

3. *Задание для учащихся*: сформулируйте утверждение, обратное свойству описанного четырехугольника, и выясните его справедливость (см. задачу № 724).

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить задачи № 106, № 105 самостоятельно с последующей взаимопроверкой.

2. Разобрать коллективно задачу № 697.

Задача № 697 (рис. 760)

Проведем радиусы OH_1, OH_2, OH_3, …, OH_n, где H_1, H_2, H_3, …, H_n – точки касания, тогда OH_1, OH_2, OH_3, …, OH_n – высоты треугольников AOB, BOC, COD, …, KOA соответственно.

$$S_{ABCD...K} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + \ldots + S_{KOA} =$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot OH_1 + \frac{1}{2}BC \cdot OH_2 + \ldots + \frac{1}{2}KA \cdot OH_n.$$

$OH_1 = OH_2 = OH_3 = \ldots = OH_n = r$, тогда

$$S_{ABCD...K} = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (AB + BC + CD + \ldots + KA) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot P_{AB...K}.$$

Наводящие вопросы:

– Разобьем многоугольник на треугольники с общей вершиной O. Что вы можете сказать о площадях этих треугольников?

– Чему равна площадь многоугольника?

3. Решить задачи № 698, 696 самостоятельно.

Задача № 698

Краткое решение:

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны. Если сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника равна 12 см, то его периметр равен $12 \cdot 2 = 24$ (см) $\Rightarrow S = \frac{1}{2}P \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60$ (см^2).

Ответ: 60 см^2.

Задача № 696

Краткое решение:

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы противоположных сторон равны. Если в параллелограмм $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = AD + BC$. Так как в параллелограмме противоположные стороны равны, то $AB = CD$, $AD = BC$ $\Rightarrow 2AB = 2AD \Rightarrow AB = AD = BC = CD \Rightarrow ABCD$ – ромб.

V. Самостоятельная работа обучающего характера

I уровень

I вариант

1. В равносторонний треугольник вписана окружность радиусом 4 см. Найдите сторону треугольника.

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Найдите стороны AB и CD, если $BC = 6$ см, $AD = 9$ см, AB в два раза больше, чем CD.

II вариант

1. В равносторонний треугольник со стороной 8 см вписана окружность. Найдите радиус окружности.

2. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Найдите стороны BC и AD, если $AB = 7$ см, $CD = 11$ см, BC в 2 раза меньше AD.

II уровень

I вариант

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AB = 10$ см, радиус вписанной в него окружности равен 2 см. Найдите площадь этого треугольника.

2. В равнобедренной трапеции разность оснований равна 20 см, а радиус вписанной в нее окружности равен $2\sqrt{14}$ см. Найдите стороны трапеции.

II вариант

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC + BC = 17$ см, радиус вписанной в него окружности равен 2 см. Найдите площадь этого треугольника.

2. В равнобедренной трапеции сумма оснований равна 48 см, а радиус вписанной в нее окружности равен $6\sqrt{3}$ см. Найдите стороны трапеции.

III уровень

I вариант

1. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, радиус вписанной в него окружности равен 5 см. Найдите площадь треугольника.

2. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 и 8 см. Найдите площадь трапеции.

II вариант

1. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, радиус описанной в него окружности равен 4 см. Найдите площадь треугольника.

2. Расстояния от центра вписанной в равнобедренную трапецию окружности до концов боковой стороны равны 9 и 12 см. Найдите площадь трапеции.

VI. Подведение итогов урока

Оценить работу учащихся.

Домашнее задание

П. 74, вопрос 23. Решить задачи № 695, 699, 700, 701.

Урок 63
Описанная окружность

Цели урока:

- Ввести понятия описанной около окружности многоугольника и вписанного в окружность многоугольника.
- Рассмотреть теорему об окружности, описанной около треугольника и показать ее применение при решении задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ ошибок самостоятельной работы, работа над ошибками.

Ответы к задачам самостоятельной работы

I уровень

I вариант

1. $8\sqrt{3}$ см.

2. $AB = 10$ см, $CD = 5$ см.

II вариант

1. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см.

2. $BC = 6$ см, $AD = 12$ см.

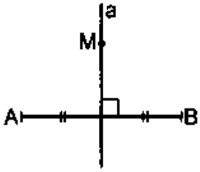


Рис. 761

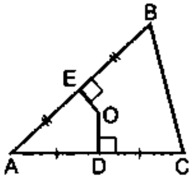


Рис. 762

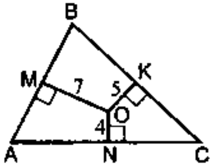


Рис. 763

II уровень

I вариант
1. 24 см^2.
2. 8, 18, 24, 18 см.

II вариант
1. 30 см^2.
2. 12, 24, 36, 24 см.

III уровень

I вариант
1. $75 + 5\sqrt{3}$ см^2.
2. 94,08 см^2.

II вариант
1. $48 + 32\sqrt{3}$ см^2.
2. 216 см^2.

Решение задач на готовых чертежах с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1. Рис. 761.
a – серединный перпендикуляр к отрезку *AB*, $M \in AB$.
Сравните MA и *MB*.

2. Рис. 762.
Дано: $OD = 3$, $AC = 8$.
Найти: *AO*, *OC*, *OB*.

3. Рис. 763.
Дано: $AO = 8$; *OM*, *ON*, *OK* – серединные перпендикуляры.
Найти: стороны треугольника *ABC*.

4. Рис. 764.
Найти: $\angle ACB$, $\angle CAO$.

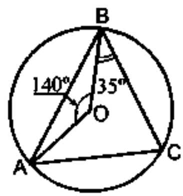


Рис. 764

III. Изучение нового материала

1. Ввести понятие окружности, описанной около многоугольника, и многоугольника, вписанного в окружность.

Определение: Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник – вписанным в эту окружность.

Рис. 765. *ABCDE* вписан в окружность. *ABFE* не вписан в окружность, так как *F* не лежит на окружности.

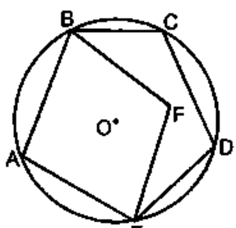


Рис. 765

2. Работа в рабочих тетрадях: решить задачу № 109.

3. Теорема об окружности, описанной около треугольника.

Решение задачи на построение для самостоятельного (индивидуального или группового) решения с последующим обсуждением: «Описать окружность около данного треугольника *ABC*».

В случае если в процессе решения задачи возникнут затруднения, возможны наводящие вопросы:

– Что значит «окружность описана около треугольника *ABC*»?
– Чем являются для данной окружности отрезки, соединяющие центр окружности с вершинами треугольника? Сравните отрезки *OA*, *OB*, *OC*.
– Если $OA = OB$, то где по отношению к отрезку *AB* находится точка *O*? А по отношению к отрезку *BC*, *AC*?
– Укажите точное расположение точки *O*.
– Докажите, что окружность с центром в точке *O* и радиусом, равным *OA*, являются описанным около данного треугольника.
– Сколько таких окружностей можно построить?

Теорема: Около любого треугольника можно описать окружность.

Доказательство теоремы можно порекомендовать прочитать дома самостоятельно.

IV. Закрепление изученного материала

1. Работа в рабочих тетрадях: решить самостоятельно задачи № 110, 111. Учитель оказывает индивидуальную помощь нуждающимся в этом учащимся.

2. Разобрать коллективно задачи № 704, 706.

Задача № 704 (рис. 766)

а) Так как треугольник *ABC* – прямоугольный, то $\angle C = 90°$. $\angle C$ – вписанный в окружность и так как он прямой, то опирается на диаметр *AB*, тогда центр окружности лежит на *AB* и является ее серединой.

б) Так как $AB = d$, $\angle A = \alpha$, то $\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$, $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$, значит, $BC = d \cdot \sin\alpha$, $AC = d \cdot \cos\alpha$.

Ответ: d; $d \sin\alpha$; $d \cos\alpha$.

Наводящие вопросы:

– Что вы можете сказать о прямом угле, вписанном в окружность?
– Чем является гипотенуза прямоугольного треугольника, вписанного в окружность?
– Как взаимосвязаны острый угол, гипотенуза и катет прямоугольного треугольника?

Задача № 706 (рис. 767)

Решение: Так как треугольник *ABC* равносторонний, то его медиана *BH* является высотой, а значит и серединным перпен-

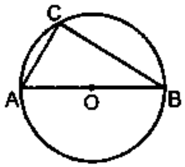


Рис. 766

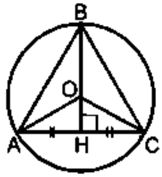


Рис. 767

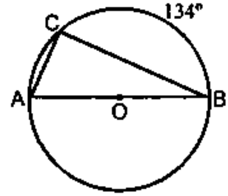


Рис. 768

дикуляром, поэтому центр описанной окружности лежит на BH.

ΔAOH – прямоугольный, в нем $AH = \frac{1}{2}AC$, $AO = 10$ см,

$\angle OAH = 30°$, $\cos\angle OAH = \frac{AH}{OA}$, $AH = OA \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= 5\sqrt{3}$ см, тогда $AC = 2 \cdot AH = 10\sqrt{3}$ см.

Ответ: $10\sqrt{3}$ см.

Наводящие вопросы:

– Где лежит центр описанной около равностороннего треугольника окружности?
– Как найти стороны треугольника AOH?

3. Решить самостоятельно задачи № 702 а), № 703, № 705 а).

Задача № 702 (а)

Краткое решение (рис. 768): $\angle C = 90°$ как угол, опирающийся на диаметр. $\angle CAB = \frac{1}{2}CB = 67°$.

$\angle CBA = 90° - \angle CAB = 23°$.

Задача № 703

Возможны два случая (см. рис. 769):

а) $\angle BAC = \frac{1}{2}\cup BC = 51° \Rightarrow \angle B = \angle C =$
$= (180° - 51) : 2 = 64°30'$.

б) $\cup BAC = 102° \angle A = \frac{1}{2}\cup BEC = \frac{1}{2} \cdot (360° -$
$\angle BAC) = \frac{1}{2} \cdot (360° - 102°) = 129° \Rightarrow$
$\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cdot (180° - 129°) = 25°30'$.

Ответ: $\angle A = 51°$, $\angle B = \angle C = 64°30'$ или
$\angle A = 129°$, $\angle B = \angle C = 25°30'$.

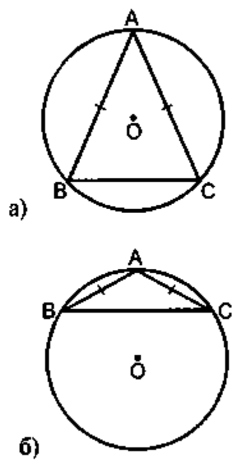


Рис. 769

Задача № 705 (а)

Краткое решение (рис. 770):

$\angle C = 90° \Rightarrow AB$ – диаметр $\Rightarrow$ по теореме Пифагора: $AB^2 = BC^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$.

Тогда $AB = 10$ (см) $\Rightarrow$ радиус окружности равен 5 см.

Ответ: 5 см.

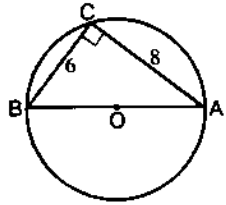


Рис. 770

V. Подведение итогов урока

Домашнее задание

П. 75, вопросы 24, 25;

Решить задачи № 702 б), 705 б), 707, 711.

Урок 64
Свойство вписанного четырехугольника

Цель урока:

- Рассмотреть свойство вписанного четырехугольника и показать его применение при решении задач.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Два ученика в ходе теоретического опроса вызываются к доске для доказательства теорем, еще два – для оформления решения домашних задач, остальные учащиеся решают задачи на готовых чертежах (устно с обсуждением решения).

Теоретический опрос

– Какая окружность называется описанной около многоугольника? Какой многоугольник называется вписанным в окружность?
– Сформулируйте и докажите теорему об окружности, описанной около треугольника.
– Докажите, что около треугольника можно описать только одну окружность.

Проверка домашнего задания

Проверить решения домашних задач 707, 711.

Задача № 707

Краткое решение (рис. 771):

В ΔABC $\angle A = \angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$. Тогда $\cup BC = 60° \Rightarrow \angle BOC = 60° \Rightarrow \Delta OBC$ – равносторонний $\Rightarrow OB = OC = r = 8$ см $\Rightarrow$ диаметр равен 16 см.

Ответ: 16 см.

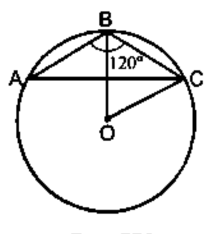


Рис. 771

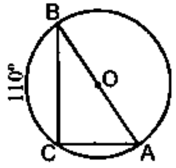


Рис. 772

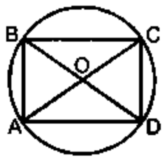


Рис. 773

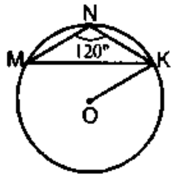


Рис. 774

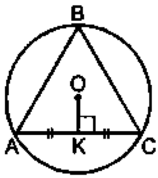


Рис. 775

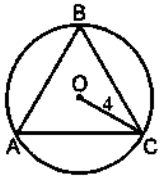


Рис. 776

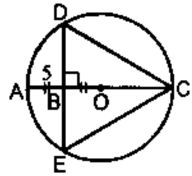


Рис. 777

Задача № 711

Краткое решение:

Центр описанной около треугольника окружности совпадает с точкой пересечения его серединных перпендикуляров, а радиус окружности равен расстоянию от центра окружности до любой из вершин треугольника.

В прямоугольном треугольнике центр описанной около него окружности совпадает с серединой гипотенузы, а радиус равен половине гипотенузы.

Решение задач по готовым чертежам

Задачи 1–6 – с целью повторения изученного на предыдущем уроке материала;

Задачи 7–9 – с целью подготовки учащихся к восприятию нового материала.

1. Рис. 772. ***Найти***: $\angle B$.
2. Рис. 773. *Дано*: $AB : BC = 1 : 2$; $AC = 5\sqrt{5}$.
   Доказать: *ABCD* – прямоугольник.
   Найти: *AB*, *BC*.
3. Рис. 774. *Дано*: $MN = NK = 4$.
   Найти: *OK*.
4. Рис. 775. *Дано*: ΔABC – равносторонний, $OK = 3$ см.
   Найти: *AB*.
5. Рис. 776. *Дано*: ΔABC – равносторонний.
   Найти: *AB*.
6. Рис. 777. ***Найти***: *DC*.
7. Рис. 778. ***Найти*** углы четырехугольника *ABCD*.

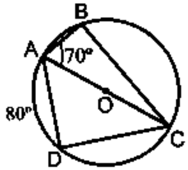


Рис. 778

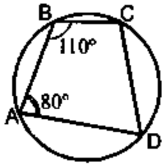


Рис. 779

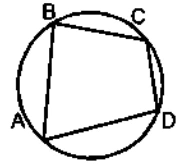


Рис. 780

8. Рис. 779.
   Найти: $\angle C$, $\angle D$.
9. Рис. 780.
   Найти: $\angle A + \angle C$.

Ответы к задачам на готовых чертежах

1. $\angle B = 35°$.
2. $AB = 5$ см, ВС = 10 см.
3. $OK = 4$.
4. $AB = 6\sqrt{3}$ см.
5. $AB = 4\sqrt{3}$ см.
6. $DC = 10\sqrt{3}$ см.
7. $\angle B = \angle D = 90°$; $\angle BAD = 120°$; $\angle BCD = 60°$.
8. $\angle C = 100°$; $\angle D = 70°$.
9. $\angle A + \angle C = 180°$.

Заслушать ответы учащихся, работавших у доски.

III. Изучение нового материала

1. Объяснить, что около четырехугольника не всегда можно описать окружность на примерах ромба, параллелограмма, не являющихся квадратом и прямоугольником соответственно.

2. Для доказательства теоремы о свойстве вписанного четырехугольника учащимся можно предложить задачу для самостоятельного решения с последующим обсуждением решения.

Задача: Докажите, что в любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Решение (рис. 781):

$$\angle A \text{ – вписанный в окружность} \Rightarrow \angle A = \frac{1}{2}\cup BCD.$$

$$\angle C \text{ – вписанный в окружность} \Rightarrow \angle C = \frac{1}{2}\cup BAD.$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\cup BCD + \frac{1}{2}\cup BAD = \frac{1}{2}\cdot(\cup BCD + \cup BAD) =$$
$$= 360° : 2 = 180°.$$

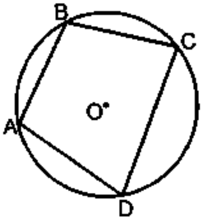
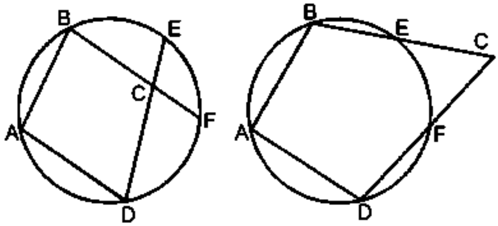


Рис. 781



а) *Рис. 782* б)

Таким же образом $\angle B + \angle D = \frac{1}{2}\cup ADC + \frac{1}{2}\cup ABC = \frac{1}{2}\cdot$ $(\cup ADC + \frac{1}{2}\cup ABC) = \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$.

Наводящие вопросы:

– Каким по отношению к окружности является $\angle A$ и чему равна его величина?

– Чему равна сумма углов A и C?

3. Для доказательства утверждения, обратного свойству вписанного четырехугольника, предложить задание:

Сформулируйте утверждение, обратное свойству вписанного четырехугольника, и выясните его истинность.

Теорема: Если сумма противолежащих углов четырехугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Дано: $ABCD$ – четырехугольник, $\angle A + \angle C = 180°$.

Доказать: около $ABCD$ можно описать окружность.

Доказательство: Проведем окружность через три вершины четырехугольника A, B, D и выясним расположение вершины C по отношению к окружности. Возможны три случая:

1) C лежит внутри окружности;
2) C лежит вне окружности;
3) C лежит на окружности.

1) Рассмотрим первый случай (рис. 782 а):

$\angle BCD = \frac{1}{2}\cdot(\cup BAD + \cup EF) \Rightarrow$ так как $\angle A = \frac{1}{2}\cup BED$, то $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\cdot(\cup BED + \cup BAD + \cup EF) > \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$.

2) Рассмотрим второй случай (рис. 782 б):

$\angle BCD = \frac{1}{2}\cdot(\cup BAD - \cup EF) \Rightarrow$ так как $\angle A = \frac{1}{2}\cup BED$, то $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\cdot(\cup BAD + \cup BED - \cup EF) < \frac{1}{2}\cdot 360° = 180°$, что противоречит условию $\angle A + \angle C = 180°$.

3) Единственно возможным остается третий случай, т. е. точка C лежит на окружности и четырехугольник $ABCD$ является вписанным в окружность.

IV. Закрепление изученного материала

Решить устно задачу № 708.

Разобрать задачи:

Задача 1

Найдите периметр прямоугольника, вписанного в окружность радиуса 7,5 см, если стороны прямоугольника относятся как 3 : 4.

Решение (рис. 783):

Так как прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность, то его диагональ является диаметром данной окружности, т. е.
$AC = 2 \cdot 7{,}5 = 15$ см.
ΔABC – прямоугольный, $AB : BC = 3 : 4$ по условию задачи ($AB = 3 \cdot x$, $BC = 4x$), $AC = 15$ см.
По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2$, т. е. $(3 \cdot x)^2 + (4 \cdot x)^2 = 15^2$, откуда $x = 3$, $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, тогда $P_{ABCD} = 2 \cdot (9 + 12) = 42$ см.

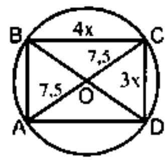


Рис. 783

Ответ: 42 см.

Наводящие вопросы:

– Чему равна диагональ прямоугольника?
– Как найти катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равны 15 см, а катеты относятся как 3 : 4?
– Вычислите периметр прямоугольника.

Задача 2

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке Q. Докажите, что около четырехугольника $BEQD$ можно описать окружность.

Решение (рис. 784):

Проведем отрезок BQ, тогда ΔBQE и ΔBQD – прямоугольные $\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle 3 + \angle 4 = 90°$.

$\angle EBD + \angle EGD = (\angle 1 + \angle 3) + (\angle 2 + \angle 4) =$
$= (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 90° + 90° = 180°$.

$\angle BEQ = \angle BDQ = 90°$, так как AD и CE – высоты.

В четырехугольнике $BEQD$ суммы противоположных углов равны 180°, поэтому около него можно описать окружность.

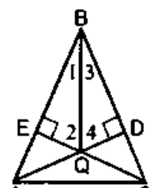


Рис. 784

Наводящие вопросы:

– В каком случае около четырехугольника можно описать окружность?
– Чему равна сумма углов E и D четырехугольника $BEQD$? А сумма углов B и Q? Почему?

V. Самостоятельная работа

I уровень

I вариант

1. Равносторонний треугольник *ABC* вписан в окружность радиуса 6 см. Найдите его сторону.

2. Прямоугольный треугольник с катетами 6 см и 8 см вписан в окружность. Найдите его радиус.

II вариант

1. Равносторонний треугольник *MNK* со стороной 8 см вписан в окружность. Найдите его радиус.

2. Прямоугольный треугольник вписан в окружность радиуса 6,5 см. Найдите площадь треугольника, если один из его катетов равен 5 см.

II уровень

I вариант

1. Равнобедренный треугольник с основанием 8 см вписан в окружность радиуса 5 см. Найдите площадь этого треугольника и его боковую сторону.

2. Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность с диаметром *AC*. Найдите углы четырехугольника, если $\smile BC = 100°$, $\smile CD = 60°$.

II вариант

1. Равнобедренный треугольник с высотой, проведенной к основанию и равной 16 см, вписан в окружность радиуса 10 см. Найдите площадь этого треугольника и его боковую сторону.

2. Четырехугольник *MNKP* вписан в окружность с диаметром *MK*. Найдите углы четырехугольника, если $\smile NK = 140°$, $\smile PK = 100°$.

VI. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи № 709, 710, 731, 735;

Вопросы 1–26 без доказательств.

Урок 65
Решение задач по теме «Окружность»

Цели урока:

- Систематизировать теоретический материал главы VIII.
- Совершенствовать навыки решения задач по теме «Окружность».
- Подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ ошибок самостоятельной работы и работа над ошибками.

Ответы к задачам самостоятельной работы

(Ответы выписать на доске или вывесить в классе на стенде.)

I уровень

I вариант

1. $6\sqrt{3}$ см.
2. 5 см.

II вариант

1. $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ см.
2. 30 $см^2$.

II уровень

I вариант

1. 32 $см^2$, $4\sqrt{5}$ см.
2. $\angle B = \angle D = 90°$, $\angle A = 80°$, $\angle C = 100°$.

II вариант

1. 128 $см^2$, $8\sqrt{5}$ см.
2. $\angle N = \angle P = 90°$, $\angle K = 60°$, $\angle M = 120°$.

Теоретический тест

(Тест проводится с целью систематизации теоретического материала.)

Задание: заполните пропуски, чтобы получилось верное утверждение или правильная формулировка определения, теоремы, свойства.

I вариант

1. Прямая и окружность имеют две общие точки, если расстояние от … до … меньше…
2. Если прямая AB – касательная к окружности с центром O и B – точка касания, то прямая AB и … OB …
3. Угол AOB является центральным, если точка O является … лучи OA и OB …
4. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, …

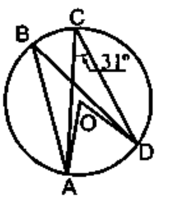


Рис. 785

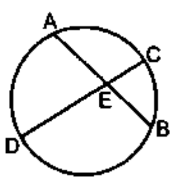


Рис. 786

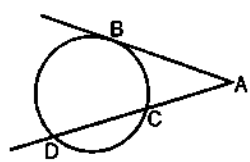


Рис. 787

5. Рис. 785. $\angle ABD = \ldots$ $\angle AOD = \ldots$
6. Рис. 786.
   Если хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E, то верно равенство …
7. Рис. 787. Если AB – касательная, AD – секущая, то выполняется равенство …
8. Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то …
9. Центр окружности, вписанной в треугольник, совпадает с точкой …
10. Если точка A равноудалена от сторон данного угла, то она лежит на …
11. Если точка B лежит на серединном перпендикуляре, проведенному к данному отрезку, то она …
12. Около любого … можно описать окружность.

II вариант

1. Прямая и окружность имеют только одну общую точку если расстояние от … до … равно …
2. Если прямая CD проходит через конец радиуса OK и $CD \perp OK$, то CD является … к данной окружности.
3. Угол ABC является вписанным, если точка B … , а лучи BA и BC …
4. Вписанные углы равны, если они … на одну …
5. Рис. 788. $\angle ABD = \ldots$ $\angle ACD = \ldots$
6. Рис. 789.
   Если отрезки AB и AC – отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки, то …
7. Рис. 790. Если AC и AE – секущие, то выполняется равенство …
8. Если четырехугольник описан около окружности, то …
9. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с точкой …
10. Если точка C равноудалена от концов данного отрезка, то она лежит на …
11. Если точка D лежит на биссектрисе данного угла, то она …
12. В любой … можно вписать окружность.

Взаимопроверка работ (тестов), используя таблицу 7 (см. приложение). Анализ ошибок.

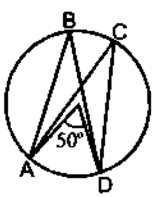


Рис. 788

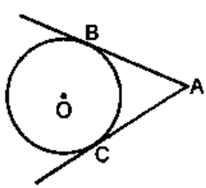


Рис. 789

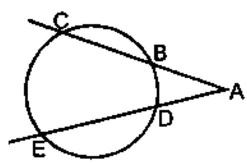


Рис. 790

III. Решение задач

1. Разобрать коллективно задачи № 719, 732.

Задача № 719 (рис. 791)

$\angle ADC + \angle ADE = 180°$, так как они смежные $\Rightarrow \angle ADC = 180° - \angle ADE$.

$\angle ADE$ – вписанный $\Rightarrow \angle ADE = \cup AE : 2$.

$\angle BAD$ – вписанный $\Rightarrow \angle BAD = \cup BD : 2$.

В треугольнике ACD сумма углов равна $180° \Rightarrow$
$\angle ACD = 180° - (\angle CAD + \angle ADC) = 180° - (\angle BAD + 180° - \angle ADE) =$
$= \angle ADE - \angle BAD = \cup AE : 2 - \cup BD : 2 = (\cup AE - \cup BD) : 2$.

Наводящие вопросы:

– Чему равна величина $\angle ADE$? $\angle BAD$?
– Найдите $\angle C$ из треугольника ADC.

Задача № 732 (рис. 792)

В четырехугольнике $BCMH$ $\angle C = 90°$, $\angle BHM = 90°$.

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна $360° \Rightarrow$ так как $\angle C = 90°$ и $\angle BHM = 90°$, то $\angle C + \angle BHM = \angle B + \angle HMC = 180°$, то есть около данного четырехугольника можно описать окружность.

Вписанные углы MHC и MBC опираются на одну и ту же дугу MC, поэтому $\angle MHC = \angle MBC$.

Наводящие вопросы:

– Найдите суммы противолежащих углов четырехугольника $BCMH$. О чем это говорит?
– Что общего между углами MHC и MBC?

2. Решить самостоятельно:

I уровень – решить задачи № 1–3 (см. ниже);

II уровень – решить задачи № 733, 730, 725, 727.

Задача № 1

Через точку A окружности проведены диаметр AC и две хорды AB и AD так, что хорда AB равна радиусу окружности, точка D делит полуокружность AC на две равные дуги. Найдите углы четырехугольника $ABCD$, если точки C и D лежат по разные стороны от диаметра AC.

Решение (рис. 793):

$\angle ABC = \angle ADC = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр.

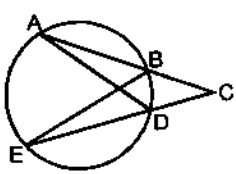


Рис. 791

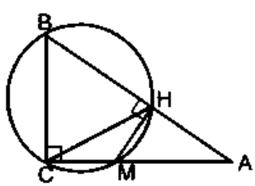


Рис. 792

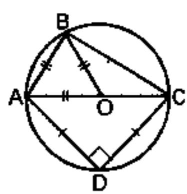


Рис. 793

ΔAOB – равносторонний, так как $AO = BO$ как радиусы, а хорда AB равна радиусу, тогда $\angle BAO = 60°$, $\angle BCO = 30°$.

Точка D делит полуокружность AC на две равные дуги AD и DC, поэтому хорды AD и DC равны, т. е. ΔADC – равнобедренный прямоугольный, поэтому $\angle DAC = \angle DCA = 45°$.

$\angle BAD = \angle BAC + \angle DAC = 60° + 45° = 105°$.

$\angle BCD = \angle BCO + \angle DCA = 30° + 45° = 75°$.

Ответ: $\angle ABC = \angle ADC = 90°$, $\angle BAD = 105°$, $\angle BCD = 75°$.

Задача № 2

Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а высота, проведенная к ней равна 12 см. Найдите радиусы вписанной в треугольник и описанной около треугольника окружностей.

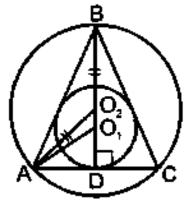


Рис. 794

Решение (рис. 794):

ΔAO_2D – прямоугольный, по теореме Пифагора $AO_2^2 = AD^2 + DO_2^2$.

Точка O_2 – центр описанной окружности – лежит на биссектрисе, медиане, высоте, а значит серединном перпендикуляре, проведенном к основанию.

$BD = 12$ см, $BO_2 = R \Rightarrow DO_2 = 12 - R$, $R^2 = 9^2 + (12 - R^2)$.

$R^2 = 81 + 144 - 24 \cdot R + R^2$, $24 \cdot R = 225 \Rightarrow R = 9\frac{3}{8}$ (см).

Центр вписанной окружности также лежит на BD.

AO_1 – биссектриса $\angle BAC$, следовательно $\dfrac{AB}{BO_1} = \dfrac{AD}{DO_1}$.

По теореме Пифагора в ΔABD:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 9^2 + 12^2 = 225$, то есть $AB = 15$ см.

Т. к. $BO_2 = R$, то: $DO_1 = BD - BO_2 - O_1O_2 = 12 - 9\frac{3}{8} - O_1O_2$ (см),

$BO_1 = BO_2 + O_1O_2 = 9\frac{3}{8} + O_1O_2$. $\dfrac{15}{9\frac{3}{8} + O_1O_2} = \dfrac{9}{2\frac{5}{8} - O_1O_2}$,

$15 \cdot \left(\dfrac{21}{8} - O_1O_2\right) = 9 \cdot \left(\dfrac{75}{8} + O_1O_2\right)$, $O_1O_2 = -1\dfrac{7}{8}$.

Так как $O_1O_2 < 0 \Rightarrow O_1$ лежит между точками B и O_2, тогда

$2 = DO_1 - O_1O_2 = 2\frac{5}{8} + 1\frac{7}{8} = 4{,}5$ см.

Ответ: $9\frac{3}{8}$ см и 4,5 см.

Задача № 3

Отрезок BD – диаметр окружности с центром O. Хорда AC пересекает радиус OB под прямым углом и точкой пересечения делит его пополам. Найдите углы четырехугольника $ABCD$ и градусные меры дуг AB, AD, BC, CD.

Решение (рис. 795):

$\Delta BCK = \Delta OCK$ по двум катетам $\Rightarrow$

$BC = OC = R = OB \Rightarrow \Delta BCO$ – равносторонний, следовательно, $\angle CBO = \angle COB = 60° \Rightarrow \cup BC = 60°$.

ΔAOC – равнобедренный с основанием AC. Высота OK, проведенная к основанию, является его медианой, т. е. $CK = KA$.

Так как диагонали четырехугольника $ABCO$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то $ABCO$ – параллелограмм, тогда $BC = CO = AB = AO \Rightarrow$

$\angle OBA = 60°$, $\angle BOA = 60° \Rightarrow \angle CBA = 120°$, $\cup AB = 60°$.

$\angle BCD = 90°$, $\angle BAD = 90°$ как углы, опирающиеся на диаметр.

Четырехугольник $ABCD$ – вписанный $\Rightarrow$

$\angle ABC + \angle ADC = 180° \Rightarrow \angle ADC = 60°$.

Ответ: 90°, 120°, 90°, 60°.

Решение задач II уровня

Задача № 733

Краткое решение (рис. 796):

Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис, центр описанной окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров. В равностороннем треугольнике медианы, биссектрисы, высоты, серединные перпендикуляры совпадают, значит, совпадают центры вписанной и описанной окружностей, т. е. $R + r = BD$. Но так как BD – медиана, O – точка пересечения медиан, то $R : r = 2 : 1 \Rightarrow$ так как $R = 10$ см, то $r = 5$ см.

Задача № 730

Краткое решение (рис. 797):

$\angle A + \angle B = 180°$. $OACB$ – выпуклый четырехугольник $\Rightarrow \angle O + \angle A + \angle C + \angle B = 180° \Rightarrow \angle O + \angle C = 180° \Rightarrow$ около четырехугольника $OACB$ можно описать окружность.

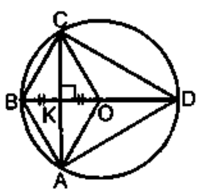


Рис. 795

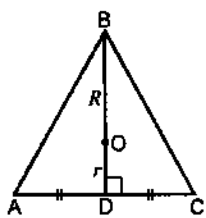


Рис. 796

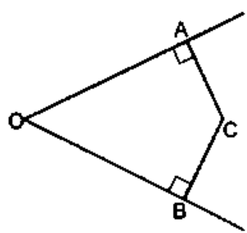


Рис. 797

Задача № 725

Краткое решение (рис. 798):

Так как BC, CD, AB, AD – касательные, то $BM = BN$, $AM = AP$, $CN = CK$, $DP = DK$.

$AMOP$ – квадрат $\Rightarrow AP = r \Rightarrow DP = a - r$ и $KD = a - r$.

$MBNO$ – квадрат $\Rightarrow BN = r \Rightarrow NC = b - r$ и $CK = b - r \Rightarrow CD = CK = KD = a + b - 2r$.

$PNCH$ – прямоугольник $\Rightarrow PH = a - r - (b - r) = a - b \Rightarrow$ в ΔCHD по теореме Пифагора

$CD^2 = CH^2 + HD^2 \Rightarrow (a + b - 2r)^2 = (2r)^2 + (a - b)^2$

$a^2 + b^2 + 4r^2 + 2ab - 4ar - 4br = 4r^2 + a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab - 4ar - 4br = -2ab \Rightarrow 4ab = (4a + 4b)^2 \Rightarrow r = \dfrac{4ab}{4a+4b} = \dfrac{ab}{a+b}$.

Ответ: $r = \dfrac{ab}{a+b}$.

Задача № 727

Центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, поэтому точка O_2 лежит на серединном перпендикуляре, проведенном к основанию.

Центр окружности, вписанной в треугольник, находится в точке пересечения биссектрис этого треугольника. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является также медианой и высотой, т. е. содержится серединным перпендикуляром, проведенным к основанию, поэтому точка O_1 лежит на серединном перпендикуляре, проведенном к основанию.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

I уровень: задачи на готовых чертежах (задачи дать учащимся с ответами);

II уровень: задачи № 726, 728, 722, 734 письменно, № 718 устно.

Домашние задачи на готовых чертежах

1. Рис. 799. *Дано*: $R = 3$ см, $AB = 15$ см. *Найти*: AK, KB.

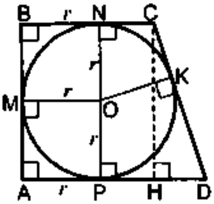


Рис. 798

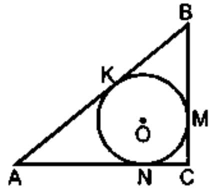


Рис. 799

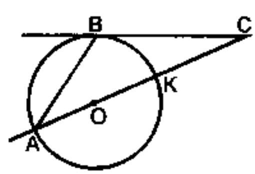


Рис. 800

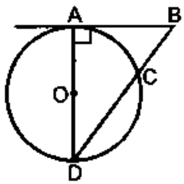


Рис. 801

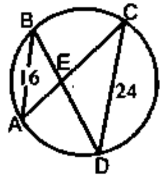


Рис. 802

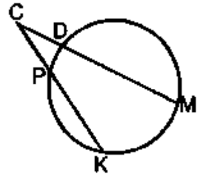


Рис. 803

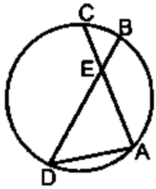


Рис. 804

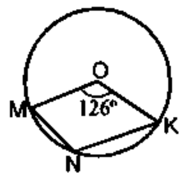


Рис. 805

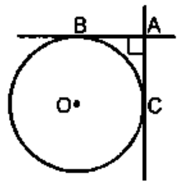


Рис. 806

2. Рис. 800. *Дано*: B – точка касания, $\smile BK = 58°$.
   Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
3. Рис. 801. *Дано*: $AB = 15$.
   Найти: DC, BC.
4. Рис. 802. *Дано*: $P_{ABE} = 28$ см.
   Найти: P_{DEC}.
5. Рис. 803. *Дано*: $CK = 16$, $CP = 6$, $CM = 24$.
   Найти: DM.
6. Рис. 804. *Дано*: $\angle CED$ в 9 раз больше $\angle BEC$, $\angle DAE$ на 61° больше $\angle BEC$.
   Найти: $\angle CBE$.
7. Рис. 805.
   Найти: $\angle MNK$.
8. Рис. 806. *Дано*: AB, AC – касательные, $R = 11$. ***Найти***: BC.
9. Рис. 807. *Дано*: $\smile BK = 40°$, $\smile AM = 100°$.
   Найти: $\angle ABM$, $\angle BMK$, $\angle ACM$.

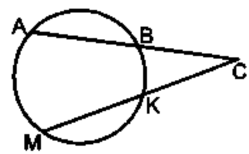


Рис. 807

Ответы:

1. 6 см, 9 см.
2. $\angle A = 29°$, $\angle B = 119°$, $\angle C = 32°$.
3. $BC = 9$, $CD = 16$.
4. $P_{CDE} = 42$ см.
5. $DM = 20$.
6. $\angle CBE = 79°$.
7. $\angle MNK = 117°$.
8. $BC = 11\sqrt{2}$.
9. $\angle ABM = 50°$, $\angle BMK = 20°$, $\angle ACM = 30°$.

Урок 66
Контрольная работа № 5 по теме «Окружность»

Цель урока:

- Проверить знания, умения и навыки учащихся по теме «Окружность».

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Выполнение контрольной работы

(См. приложение).

Текст контрольной работы раздать учащимся в распечатанном виде.

III. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Решить задачи, с которыми ученик не справился в классе. В конце урока (после окончания работы) в классе можно вывесить ответы и указания к задачам контрольной работы.

Ответы и указания к задачам контрольной работы

I уровень

I вариант

1. $AC = AB = 12$ см, $AO = \sqrt{AB^2 + OB^2} = 15$ см.
2. $\angle BCA = \frac{1}{2} \cup AB = 55°$, $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC = 60°$.
3. $ME \cdot NE = PE \cdot KE$, $PE = 6$ см, $PK = PE + KE = 12$ см.
4. ΔAOB и ΔBOC – равнобедренные, $AO = BO = CO = 16$ см. $AB = 16\sqrt{3}$ см, $BC = 16\sqrt{2}$ см.

II вариант

1. $MN = MK = \sqrt{MO^2 - ON^2} = 12$ см.
2. $\angle BOC = \cup BC = 120°$, $\angle ABC = \cup AC : 2 = 45°$.
3. $AF \cdot BF = CF \cdot DF$, $CF = 8$ см, $CD = CF + DF = 16$ см.
4. ΔMON и ΔNOK – равнобедренные, $MO = NO = KO = 12$ см. $MN = 12\sqrt{3}$ см, $NK = 12\sqrt{2}$ см.

II уровень

I вариант

1. Стороны треугольника равны 6 см, 8 см и 10 см. Т. к. $10^2 = 6^2 + 8^2$, то данный треугольник – прямоугольный.

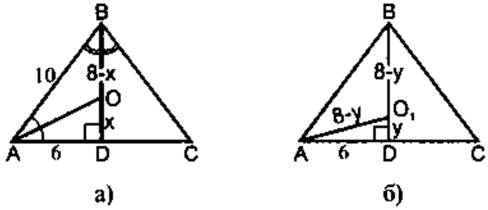


Рис. 808

2. $\cup ACB = 150°$, $\cup AMB = 210° \Rightarrow \cup BM = 30°$,
   $\angle BOM = 30° \Rightarrow \angle AMB = 75°$.
   $\angle AMB$ опирается на диаметр, $\Rightarrow \angle AMB = 90°$.
   $\angle ACB = \cup AMB : 2 = (360° - 150°) : 2 = 105°$.

Ответ: $\angle AMB = 60°$, $\angle ABM = 90°$, $\angle ACB = 105°$.

3. $AE \cdot BE = CE \cdot DE \Rightarrow CE = 9$ см, $DE = 12$ см $\Rightarrow CD = 21$ см.
   $AB = 39$ см $\Rightarrow$ диаметр может принимать значения не меньше самой длинной хорды, т. е. не меньше 39 см, значит, наименьшее значение радиуса этой окружности равно 19,5 см.

4. Рис. 808.

а) O – точка пресечения биссектрис, OD – радиус вписаной окружности. Т. к. AO – биссектриса, то

$$\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{DO} \Rightarrow \frac{10}{8-x} = \frac{6}{x},$$

$x = 3$ см, т. е. радиус вписанной окружности равен 3 см.

б) O_1 – точка пересечения серединных перпендикуляров,
$O_1A = O_1B$ – радиусы описанной окружности.
$AO_1^2 = AD^2 + DO_1^2$, т. е. $(8-y)^2 = 6^2 + y^2 \Rightarrow y = 1{,}75$ см $\Rightarrow$
$AO_1 = 6{,}25$ см, т. е. радиус описанной окружности равен 6,25 см.

Ответ: 3 см, 6,25 см.

II вариант

1. Два отрезка касательных равны 2 см, еще два – по 4 см, тогда оставшиеся два – по 6 см. Стороны треугольника равны 6 см, 8 см, 10 см.

2. $\angle EKA$ опирается на диаметр $\Rightarrow \angle EKA = 90°$.
   $\cup EKH = 135°$, $\cup AH = 45° \Rightarrow \angle EAH = 67°30'$.
   $\angle EKH = \cup EAH : 2 = 112°30'$.

Ответ: $\angle EKA = 90°$, $\angle EAH = 67°30'$, $\angle EKH = 112°30'$.

3. $MA \cdot NA = PA \cdot KA \Rightarrow PA = 4$ см, $KA = 12$ см $\Rightarrow PK = 16$ см.
   $MN = 19$ см $\Rightarrow$ т. к. диаметр – это хорда наибольшей длины, то наименьшее значение диаметра может быть равно 19 см, а наименьшее значение радиуса 9,5 см.

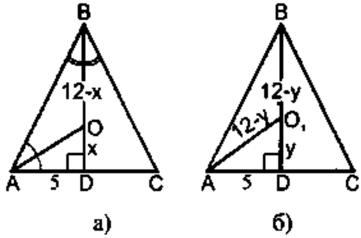


Рис. 809

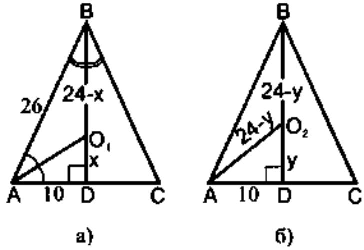


Рис. 810

4. Рис. 809.

а) O – точка пресечения биссектрис, OD – радиус вписанной окружности. Т. к. AO – биссектриса, то:

$$\frac{AB}{BO}=\frac{AD}{DO}\Rightarrow\frac{13}{12-x}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=3\frac{1}{3}\text{ см},$$

т. е. радиус вписанной окружности равен 3 см.

б) O_1 – точка пересечения серединных перпендикуляров, $O_1A = O_1B$ – радиусы описанной окружности.

$$AO_1^2 = AD^2 + DO_1^2,\text{ т. е. } (12-y)^2 = 5^2 + y^2 \Rightarrow y = 4\frac{23}{24}\text{ см} \Rightarrow$$

$$AO_1 = 7\frac{1}{24}\text{ см, т. е. радиус описанной окружности равен 7 см.}$$

Ответ: 3 см, 7 см.

III уровень

I вариант

1. Рис. 810.

$$\frac{AB}{BO_1}=\frac{AD}{DO_1};\ \ \frac{26}{24-x}=\frac{10}{x};\ \ x=6\frac{2}{3};\ r=6\frac{2}{3}\text{ см.}$$

б) $(24-y)^2 = 10^2 + y^2;\ y = 9\frac{11}{12}\text{ см};\ R = 14\frac{1}{12}\text{ см.}$

Ответ: $6\frac{2}{3}$ см; $14\frac{1}{12}$ см.

2. Рис. 811.

ΔOCD – прямоугольный (т. к. DO и CO – биссектрисы углов C и D) $\Rightarrow CD = 10$ см.

$$r = OK = \frac{S_{OCD}}{CD:2} = 4{,}8\text{ см} \Rightarrow AB = 9{,}6\text{ см.}$$

$$CK = \sqrt{OC^2 - OK^2} = 3{,}6\text{ см} \Rightarrow KD = 6{,}4\text{ см} \Rightarrow$$

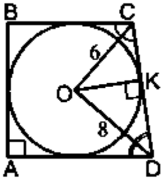


Рис. 811

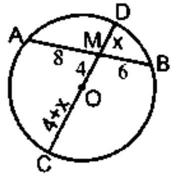


Рис. 812

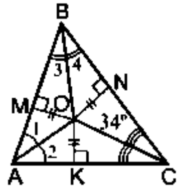


Рис. 813

$BC = 4{,}8 + 3{,}6 = 8{,}4$ (см), $AD = 4{,}8 + 6{,}4 = 11{,}2$ (см),
$S_{ABCD} = AB(BC + AD) : 2 = 94{,}08$ (см^2).

Ответ: 94,08 см^2.

3. Рис. 812.
$AM = 8$ см, $BM = 6$ см.
$(8 + x) \cdot x = 6 \cdot 8 \Rightarrow x = 4$;
$R = 8$ см.

Ответ: 8 см.

4. Рис. 813.
O – точка пересечения биссектрис $\Rightarrow \angle ACB = 68° \Rightarrow$
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 112° \Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 56°, \angle AOB = 124°$.

Ответ: $\angle AOB = 124°$.

II вариант

1. Рис. 814.

а) $\dfrac{AB}{BO_1} = \dfrac{AD}{DO_1}$; $\dfrac{17}{15 - x} = \dfrac{8}{x}$; $x = 4{,}8$; $r = 4{,}8$ см

б) $(15 - y)^2 = 8^2 + y^2$; $y = 5\dfrac{11}{30}$ см; $R = 9\dfrac{19}{30}$ см.

Ответ: 4,8 см; $9\dfrac{19}{30}$ см.

2. Рис. 815.
ΔAOB – прямоугольный (т. к. AO и BO – биссектрисы углов A и B) $\Rightarrow AB = 15$ см.

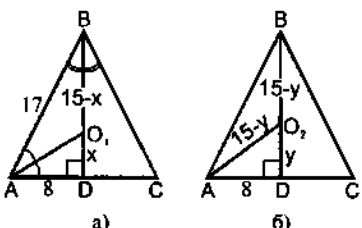


Рис. 814

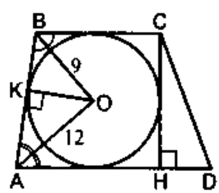


Рис. 815

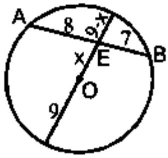


Рис. 816

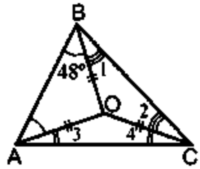


Рис. 817

$r = OK = \dfrac{S_{AOB}}{AB:2}$ 7,2 см $\Rightarrow CH = 14,4$ см.

$BK = \sqrt{OB^2 - OK^2} = 5,4$ см $AK = 9,6$ см.

$BC = 2BK = 10,8$ см, $AD = 2AK = 19,2$ (см),

$S_{ABCD} = CH(BC + AD) : 2 = 216$ (см^2).

Ответ: 216 см^2.

3. Рис. 816.

$AE = 8$ см, $BE = 7$ см.

$(9 + x)(9 - x) = 8 \cdot 7 \Rightarrow x = 5$.

$OE = 5$ см.

Ответ: $OE = 5$ см.

4. Рис. 817.

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180° - 2 \cdot 48° = 84° \Rightarrow$

$\angle 2 + \angle 4 = 84° : 2 = 42°$.

Ответ: $\angle ACB = 42°$.

Итоговое повторение

Урок 67
Повторение по темам «Четырехугольники», «Площадь»

Цели урока:

- Организовать повторение осиовных теоретических фактов по заданной теме.
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Анализ ошибок контрольной работы

а) Разобрать задачи, с которыми не справились большинство учеников.

б) Работа над ошибками с использованием ответов и указаний к задачам контрольной работы по необходимости. Индивидуальная помощь учителя менее подготовлеииым учащимся.

III. Повторение теории по темам «Четырехугольники» и «Площадь»

Повторение проводится в виде тестирования с использованием таблиц 4 и 5 (см. Приложение).

Задания теста выполняются самостоятельно с последующей самопроверкой и обсуждением заданий, по которым допущены ошибки.

Тест

Верно ли, что:

1. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.
2. В трапеции углы при каждом основании равны.
3. Квадрат – это параллелограмм, у которого все углы прямые.
4. Вершины A и C ромба $ABCD$ симметричны относительно прямой BD.

5. Если на одной из двух прямых отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные им отрезки.
6. Отрезок, соединяющий точки, лежащие на боковых сторонах трапеции, параллелен основаниям и равен их полусумме.
7. Параллелограмм, у которого все углы равны и все стороны равны, является квадратом.
8. Биссектриса одного из углов параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
9. Площадь прямоугольной трапеции равна произведению ее средней линии на боковое ребро.
10. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.
11. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ высоты AH и A_1H_1 равны, то $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = BC : B_1C_1$
12. Площадь прямоугольного треугольника равна произведению его катетов.
13. Если в ΔABC стороны равны 5, 6, 7 см, то его площадь равна $\sqrt{18\cdot(18-5)(18-6)(18-7)}$ см^2.
14. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, то $S_{ABC} : S_{A_1B_1C_1} = (AB \cdot AC) : (A_1B_1 \cdot A_1C_1)$.
15. Медианы треугольника делят треугольник на шесть равновеликих треугольников.

Укажите верный ответ из предложенных:

1. Сумма углов выпуклого пятиугольника равна:
   а) 360°; б) 900°; в) 540°.
2. Один из углов равнобедренной трапеции равен 100°. Три оставшихся угла равны:
   а) 80°, 80°, 100°; б) 75°, 75°, 110°; в) 70°, 70°, 120°.
3. Смежные стороны прямоугольника равны 6 и 8 см. Диагонали его равны:
   а) $\sqrt{28}$ и $\sqrt{28}$ см; б) 10 и 10 см; в) 14 и 14 см.
4. Сторона ромба равна 5 см, а одна из его диагоналей 6 см. Площадь ромба равна:
   а) 30 см^2; б) 24 см^2; в) 15 см^2.
5. В ромбе $ABCD$ $\angle A = 70°$, $\angle ABC$ равен:
   а) 20°; б) 110°; в) 55°.

6. В параллелограмме разность смежных сторон равна 5 см, а его периметр равен 38 см. Меньшая сторона параллелограмма равна:
а) 7 см; б) 12 см; в) 9,5 см.

7. Биссектриса угла A прямоугольника $ABCD$ пересекает BC в точке E так, что $BE = 4{,}5$ см, $CE = 5{,}5$ см. Площадь прямоугольника равна:
а) 55 см^2; б) 100 см^2; в) 45 см^2.

8. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Углы ромба равны:
а) 90°, 90°, 90°, 90°;
б) 60°, 60°, 120°, 120°;
в) 45°, 45°, 90°, 90°.

9. Ромб, не являющийся квадратом, имеет n осей симметрии. Значение n равно:
а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 4$.

10. Площадь ромба со стороной 8 см и углом 60° равна:
а) 32 см^2; б) $32\sqrt{3}$ см^2; в) $16\sqrt{3}$ см^2.

11. Площадь прямоугольника с гипотенузой 26 см, один из катетов которого равен 24 см, равна:
а) 120 см^2; б) 312 см^2; в) 240 см^2.

12. Площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной в 13 см и основанием в 24 см равна:
а) 120 см^2; б) 156 см^2; в) 60 см^2.

13. Одна из сторон параллелограмма равна 14 см, а высота, проведенная к ней – 12 см. Высота, проведенная к смежной стороне, равной 21 см, равна:
а) 8 см; б) 10 см; в) 19 см.

14. Площадь равнобедренной трапеции с основаниями 10 см и 16 см и боковой стороной 5 см равна:
а) 104 см^2; б) 52 см^2; в) 65 см^2.

15. Площадь квадрата со стороной $5\sqrt{2}$ см равна:
а) 50 см^2; б) 25 см^2; в) 100 см^2.

Ответы к тесту

Ответы к первой части теста

Верно: 1; 4; 5; 7; 8; 10; 11; 14; 15.
Неверно: 2; 3; 6; 9; 12; 13.

Ответы ко второй части теста

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
в	а	б	б	в	а	в	б	б	б	а	в	а	б	а

III. Решение задач

1. Рис. 818. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, AB, BC, S_{ABCD}.
2. Рис. 819. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: AD, DK, S_{ABCD}.
3. Рис. 820. $ABCD$ – ромб.
   Доказать: $MNKP$ – параллелограмм.
4. Рис. 821. $ABCD$ – параллелограмм.
   Найти: P_{ABCD}, S_{ABCD}.
5. Рис. 822. $ABCD$ – прямоугольник.
   Найти: $\angle CDE$, S_{ABO}, S_{BCO}.
6. Рис. 823. $ABCD$ – трапеция.
   Найти: AD, S_{ABCD}.
7. Рис. 824. $ABCD$ – трапеция.
   Найти: $\angle A$.
8. Рис. 825. $\angle 1$ на 30° меньше $\angle 2$.
   Найти: AB, S_{ABCD}.
9. Рис. 826. $AC = 9$.
   Найти: S_{ABC}, BH.
10. Рис. 827. $ABCD$ – квадрат.
   Найти: S_{ABCK}.

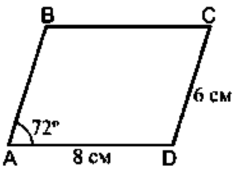


Рис. 818

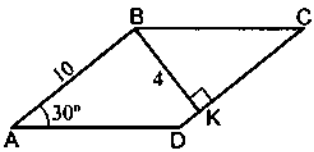


Рис. 819

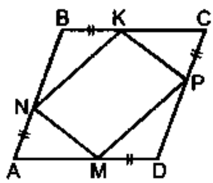


Рис. 820

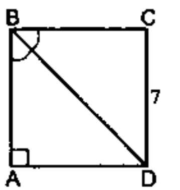


Рис. 821

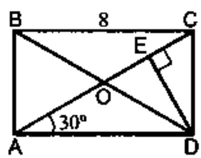


Рис. 822

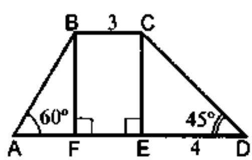


Рис. 823

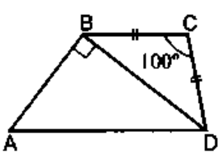


Рис. 824

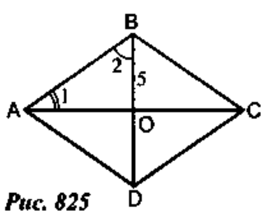


Рис. 825

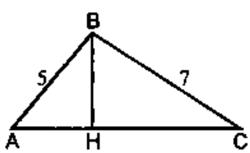


Рис. 826

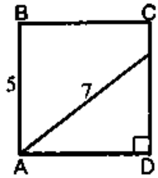


Рис. 827

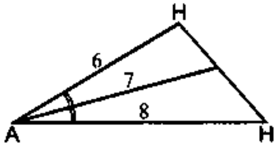


Рис. 828

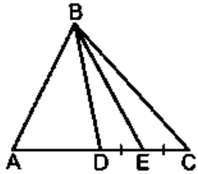


Рис. 829

11. Рис. 828.
Найти: $S_{ABD} : S_{ACD}$.

12. Рис. 829. $AC = 16$ см, $AD = DC$, $BH = 4$ см.
Найти: S_{ADE}, S_{BEC}.

Ответы к задачам:

1. $\angle B = \angle D = 108°$, $\angle C = 72°$, $S_{ABCD} = 48 \sin 72°$.
2. $AD = 8$, $DK = 10 - 4\sqrt{3}$, $S_{ABCD} = 40$.
3. $MN = KP$, $NK = MP \Rightarrow MNKP$ – параллелограмм.
4. $P_{ABCD} = 28$, $S_{ABCD} = 49$.
5. $\angle CDE = 30°$, $S_{ABO} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$; $S_{BCO} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$.
6. $AD = 7 + \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$; $S_{ABCD} = 4(5 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3})$.
7. $\angle A = 50°$.
8. $AB = 10$, $S_{ABCD} = 50\sqrt{3}$.
9. $S_{ABC} = 42\sqrt{2}$, $BH = \dfrac{28\sqrt{2}}{3}$.
10. $S_{ABCK} = 25 - 5\sqrt{6}$.
11. $S_{ABD} : S_{ACD} = 3 : 4$.
12. $S_{ADE} = 24$ см^2, $S_{BEC} = 8$ см^2.

Дополнительные задачи

1. В ΔABC через точку пересечения медиан проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Найдите AC, если $KE = 12$ см. Найдите площадь треугольника BKE, если площадь треугольника ABC 72 см^2.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне AB, один из углов параллелограмма равен 120°, $AD = 12$ см, O – точка пересечения диагоналей. Найдите диагонали параллелограмма и площадь треугольника CDO.

3. В прямоугольной трапеции $ABCD$ меньшее основание равно меньшей боковой стороне. Диагональ, проведенная из вершины тупого угла, перпендикулярна большой боковой стороне, равной 16 см. Найдите периметр и площадь трапеции.

4. В равнобедреной трапеции *MNKP* диагональ *MK* является биссектрисой угла при нижнем основании *MP*. Меньшее основание *NK* равно 8 см. Найдите площадь трапеции, если один из углов в два раза меньше другого. В каком отношении высота *KE* делит основание *MP*.

5. В параллелограмме *MNKP* диагональ *MK* равна 20 см. Точки *B* и *C* – середины сторон *NK* и *KP* соответственно. Отрезок *BC* пересекает диагональ *MK* в точке *E*. Найдите *ME* и *EK*.

6. В трапеции *ABCD* основания *BC* и *AD* равны 8 и 12 см, диагональ *AC* равна 40 см и пересекает диагональ *BD* в точке *O*. Найдите *AO* и *CO*, отношение площадей треугольников *AOD* и *BOC*.

Ответы к дополнительным задачам

1. $AC = 18$ см, $S_{BKE} = 32$ см^2.
2. $AC = 6\sqrt{7}$ см, $BD = 6\sqrt{3}$ см, $S_{CDO} = 18\sqrt{3}$ см^2.
3. $P_{ABCD} = 8(4 + \sqrt{2})$ см, $S = 96$ см^2.
4. $S_{MNKP} = 48\sqrt{3}$ см^2, $ME : EP = 3 : 1$.
5. $ME = 15$ см, $EK = 5$ см.
6. $AO = 24$ см, $CO = 16$ см, $S_{AOD} : S_{BOC} = 9 : 4$.

IV. Подведение итогов урока

Домашнее задание

Вопросы для повторения к главам VII и VIII (с. 160–161, 187–188);
Решить дополнительные задачи с урока.

Урок 68
Повторение по темам «Подобные треугольники», «Окружность»

Цели урока:

- Систематизировать теоретические знания по темам «Подобные треугольники», «Окружность».
- Совершенствовать навыки решения задач.

Ход урока

I. Организационный момент

Сообщить тему урока, сформулировать цели урока.

II. Актуализация знаний учащихся

Повторение теоретического материала в ходе решения тестовых задач с использованием таблиц 6 и 7 (см. Приложение).

Задания теста выполняются самостоятельно с последующей само- или взаимопроверкой и обсуждением заданий, при решении которых у большинства учащихся возникли затруднения.

Тест

Установите, верно ли данное утверждение:

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
2. Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
3. Рис. 830. На рисунке $\angle ABC = \angle BCD$.
4. Если хорды MN и KP параллельны, то градусные меры дуг MK и NP равны.
5. Рис. 831. Градусная мера дуги AmC, изображенной на рисунке, равна 75°.
6. Рис. 832. Углы треугольника ABC, изображенного на рисунке, равны 30°, 30°, 120°.
7. Точки A и B делят окружность на две дуги, большая из которых равна 200°, а меньшая точкой K делится в отношении 5 : 3, считая от точки A. Тогда дуга $AK = 100°$.
8. Рис. 833. Длина хорды AB, изображенной на рисунке, равна 12 см.
9. Рис. 834. Н рисунке $AB = 6$, $AC = 3$, $AE = 4$, тогда $AD = 12$, $AK = 8$.

10. В треугольнике ABC AH – биссектриса, поэтому $\dfrac{AB}{BH} = \dfrac{AC}{CH}$.

11. Рис. 835. $CH = 8$, $AC = 8\sqrt{5}$, $CB = 4\sqrt{5}$.

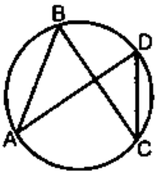


Рис. 830

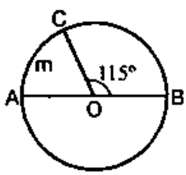


Рис. 831

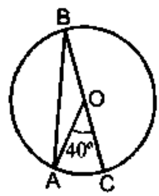


Рис. 832

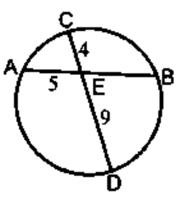


Рис. 833

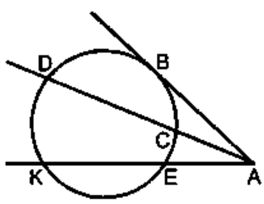


Рис. 834

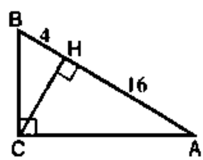


Рис. 835

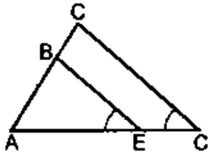


Рис. 836

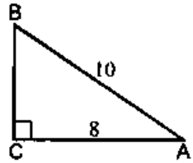


Рис. 837

12. Рис. 836. $\Delta ABE \sim \Delta ACD$

13. $\sin^2 A + \cos^2 B = 1$.

14. $\text{tg}\ C = \dfrac{\sin A}{\cos B}$

15. Рис. 837. $\sin A = \dfrac{3}{5}$.

Выберете верный ответ из предложенных:

1. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$, $A_1B_1 = 8$. Сторона B_1C_1 равна:
а) 3; б) 12; в) 14.

2. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{3}{5}$, $S_{ABC} = 60$. Площадь $\Delta A_1B_1C_1$ равна:
а) 100; б) 36; в) 22,5.

3. В трапеции $ABCD$ BC и AD – основания, $BC = 3$. $DO : OB = 4 : 3$, O – точка пересечения диагоналей. AD равно:
а) $\dfrac{9}{4}$; б) $\dfrac{9}{7}$; в) 4.

4. Если $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, то:
а) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = 1$;
б) $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$;
в) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

5. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{2}{5}$.
Если $BC = 10$, то B_1C_1 равно:
а) 25; б) 4, в) 5.

Рис. 838

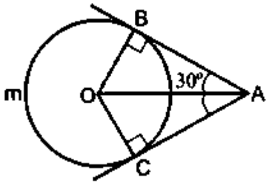


Рис. 839

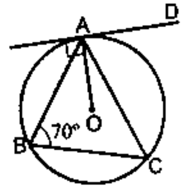


Рис. 840

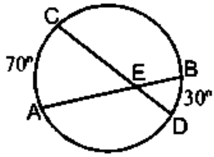


Рис. 841

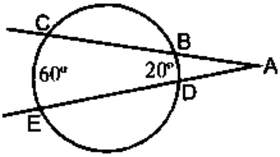


Рис. 842

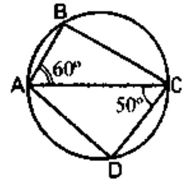


Рис. 843

6. Высота, проведенная из прямого угла вершины прямоугольного треугольника ABC к гипотенузе AC, делит ее на отрезки, равные 25 см и 4 см. Эта высота равна:

а) 7 см; б) 10 см; в) $\sqrt{29}$ см.

7. Рис. 838. По данным на чертеже получаем:

а) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$.

б) $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

в) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

8. Диагонали ромба равны 4 см и $4\sqrt{3}$ см. Его углы равны:

а) 30°, 150°, 30°, 150°;
б) 45°, 135°, 45°, 135°;
в) 60°, 120°, 60°, 120°.

9. Рис. 839. Величина дуги BmC равна:

а) 120°; б) 240°; в) 60°.

10. Рис. 840. По данным рисунка величина угла DAC равна:

а) 140°; б) 35°; в) 70°.

11. Рис. 841. По данным рисунка величина угла BED равна:

а) 50°; б) 20°; в) 40°.

12. Рис. 842. По данным рисунка величина угла CAE равна:

а) 20°; б) 40°; в) 30°.

13. Рис. 843. По данным рисунка углы четырехугольника равны:
а) 90°, 90°, 100°, 120°;
б) 90°, 90°, 80°, 100°;
в) 90°, 90°, 100°, 110°.

14. Рис. 844. По данным рисунка длина стороны AD равна:
а) 7; б) 5; в) 6.

15. Квадрат вписан в окружность диаметра 8 см. Периметр квадрата равен:
а) 32 см; б) $16\sqrt{2}$ см; в) 16 см.

Ответы к тесту

Ответы к первой части теста:

Верно: 1, 2, 4, 7, 10, 11, 12, 15.
Неверно: 3, 5, 6, 8, 9, 13, 14.

Ответы ко второй части теста:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
б	а	в	в	а	б	а	в	б	в	а	а	б	в	б

III. Решение задач по готовым чертежам

(Самостоятельно с последующим обсуждением по необходимости).

1. Рис. 845.
Найти: $\angle ABC$.

2. Рис. 846.
Найти: $\angle ACE$.

3. Рис. 847.
Найти: $\angle MEP$.

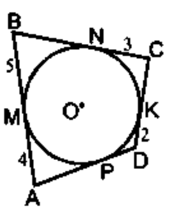


Рис. 844

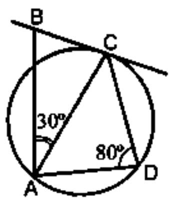


Рис. 845

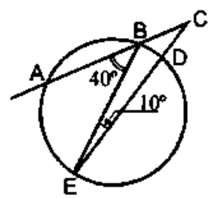


Рис. 846

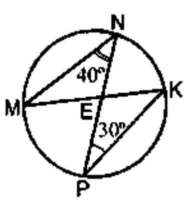


Рис. 847

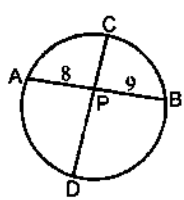


Рис. 848

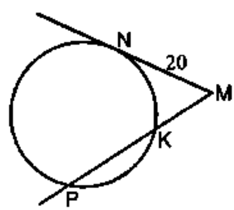


Рис. 849

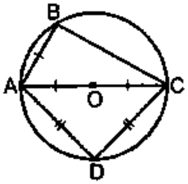


Рис. 850

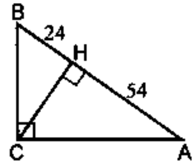


Рис. 851

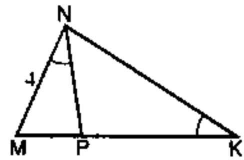


Рис. 852

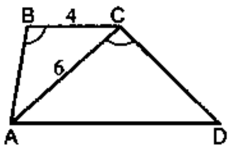


Рис. 853

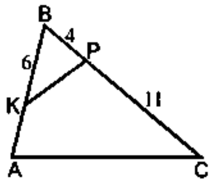


Рис. 854

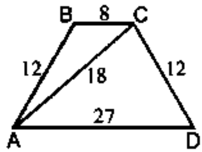


Рис. 855

4. Рис. 848. CP в 2 раза меньше PD.
Найти: CD.
5. Рис. 849. $MK : PK = 2 : 3$.
Найти: MP.
6. Рис. 850.
Найти: $\angle BAD$, $\angle BCD$.
7. Рис. 851.
Найти: CH, BC, AC.
8. Рис. 852. $MK = 8$.
Найти: PK.
9. Рис. 853. $ABCD$ – трапеция, $AB + CD = 15$.
Найти: AD, AB, CD.
10. Рис. 854. $AB \cdot BK = CB \cdot BP$.
Найти: AK.
11. Рис. 855. *Найти*: $S_{ABC} : S_{ACD}$.

Ответы к задачам на готовых чертежах

1. $\angle ABC = 70°$.
2. $\angle ACE = 30°$.
3. $\angle MEP = 70°$.
4. $CD = 18$.
5. $PM = 10\sqrt{10}$.
6. $\angle BAD = 105°$, $\angle BCD = 75°$.
7. $CH = 36$, $BC = 12\sqrt{13}$, $AC = 18\sqrt{13}$.
8. $PK = 6$.
9. $AD = 9$, $CD = 9$, $AB = 6$.
10. $AK = 4$.
11. $S_{ABC} : S_{ACD} = 4 : 9$.

Дополнительные задачи

(Задачи на готовых чертежах по усмотрению учителя можно заменить дополнительными)

1. В окружности проведены две хорды MN и PK, пересекающиеся в точке E. $MN = 14$ см, ME на 2 см больше NE. Найдите площадь треугольника PNE, если площадь треугольника MEK равна 64 см^2.

2. Даны две окружности, общие внутренние касательные которых взаимно перпендикулярны, а хорды, соединяющие точки касания, равны 5 см и 21 см. Найдите расстояние между центрами окружностей.

3. В ромбе $ABCD$ $AB = 5$ см, $BD = 2\sqrt{5}$ см. На сторонах AB и CD отмечены точки M и K соответственно так, что $AM : MB = CK : KD = 1{,}5$. Докажите, что $MBKD$ – прямоугольник и найдите его периметр и площадь.

4. В окружности радиуса 5 см проведена хорда $AB = 6$ см. На прямой AB вне хорды отмечена точка P так, что $AP : PB = 5 : 2$. Найдите расстояние от точки P до центра окружности.

5. Известно, что в треугольнике ABC $AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 9$. На стороне AB отмечена точка P так, что $AP = 2$. Окружность, проходящая через точки P и B, касается стороны AC в точке T и пересекает сторону BC в точке Q. Найдите длины отрезков AT и BQ.

Ответы к дополнительным задачам

1. 36 см^2
2. 26 см
3. $P = 12$ см, $S = 8$ см^2
4. $\sqrt{65}$ см
5. $4; \dfrac{24}{7}$.

IV. Подведение итогов урока

Использованная литература

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия. 7–9 класс. – М.: Просвещение, 2000–2004.

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф. и др. Геометрия: 8 кл. Рабочая тетрадь. – М.: Просвещение, 2002–2004.

Зив Б. Г., Мейлер В. М. «Дидактические материалы по геометрии. 8 кл».

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Глазков Ю. А. и др. «Изучение геометрии в 7–9 классе». Методические рекомендации.

Зив Б. Г., Мейлер В. М., Баханский А. Г. «Задачи по геометрии. 7–11 класс». Пособие для учащихся.

Контрольная работа № 1

I уровень

I вариант

1. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекается в точке O, $\angle ABO = 36°$. Найдите угол AOD.

2. Найдите углы прямоугольной трапеции, если один из ее углов равен 20°.

3. Стороны параллелограмма относятся как 1 : 2, а его периметр равен 30 см. Найдите стороны параллелограмма.

4. В равнобокой трапеции сумма углов при большем основании равна 96°. Найдите углы трапеции.

5*. Высота BM, проведенная из вершины угла ромба $ABCD$ образует со стороной AB угол 30°, $AM = 4$ см. Найдите длину диагонали BD ромба, если точка M лежит на стороне AD.

II вариант

1. Диагонали прямоугольника $MNKP$ пересекаются в точке O, $\angle MON = 64°$. Найдите угол OMP.

2. Найдите углы равнобокой трапеции, если один из ее углов на 30° больше второго.

3. Стороны параллелограмма относятся как 3 : 1, а его периметр равен 40 см. Найдите стороны параллелограмма.

4. В прямоугольной трапеции разность углов при одной из боковых сторон равна 48°. Найдите углы трапеции.

5*. Высота BM, проведенная из вершины угла ромба $ABCD$ образует со стороной AB угол 30°, длина диагонали AC равна 6 см. Найдите AM, если точка M лежит на продолжении стороны AD.

II уровень

I вариант

1. Периметр параллелограмма 50 см. Одна из его сторон на 5 см больше другой. Найдите длины сторон параллелограмма.

2. Найдите угол между диагоналями прямоугольника, если каждая из них делит угол прямоугольника в отношении 4 : 5.

3. Найдите углы параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна одной из его сторон.

4. В трапеции $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна боковой стороне AB, $\angle ADB = \angle BDC = 30°$. Найдите длину AD, если периметр трапеции 60 см.

5*. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M_1. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A - B - K$, $D - C - P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке M_2, $M_1M_2 = 8$ см. Найдите AD.

II вариант

1. Периметр параллелограмма 60 см. Одна из его сторон на 6 см меньше другой. Найдите длины сторон параллелограмма.

2. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите угол между диагональю и меньшей стороной прямоугольника.

3. Найдите углы параллелограмма, если одна из его диагоналей является высотой и равна половине неперпендикулярной к ней стороны параллелограмма.

4. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD и является биссектрисой угла A. Найдите длину AB, если периметр трапеции равен 35 см, $\angle D = 60°$.

5*. В параллелограмме $ABCD$ $AD = 6$ см. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M_1. На прямых AB и CD взяты точки K и P так, что $A - B - K$, $D - C - P$. Биссектрисы углов KBC и BCP пересекаются в точке M_2. Найдите M_1M_2.

III уровень

I вариант

1. В равнобокой трапеции длина боковой стороны $2d$, длины оснований $5d$ и $7d$. Найдите углы трапеции.

2. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $\angle A = 60°$, $AB = 10$, $AD = 16$. Найдите расстояния от вершин B и D до биссектрисы $\angle BCD$.

3. В ромбе $ABCD$ биссектриса угла DCA перпендикулярна стороне AD. Найдите углы ромба.

4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка M так, что треугольник AMD равносторонний. Найдите угол AMB.

5*. Биссектриса угла C параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке M и продолжение стороны AB за точку A в точке N. Найдите периметр параллелограмма, если $AN = 4$, $DM = 3$.

II вариант

1. В равнобокой трапеции боковая сторона равна меньшему основанию, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.

2. В параллелограмме $KMNP$ угол M равен 120°, $KM = 8$, $KP = 10$. Найдите расстояния от вершин M и P до биссектрисы угла MKP.

3. Высота ромба делит его сторону пополам. Найдите углы ромба.

4. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка N так, что треугольник BNC равносторонний. Найдите угол NAD.

5*. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке F и продолжение стороны CD за точку C – в точке E. Найдите периметр параллелограмма, если $BF = 2$ см, $EC = 3$ см.

Контрольная работа № 2

I уровень

I вариант

1. Сторона треугольника равна 5 см, а высота, проведенная к ней, в два раза больше стороны. Найдите площадь треугольника.

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8 см. Найдите гипотенузу и площадь треугольника.

3. Найдите площадь и периметр ромба, если его диагонали равны 8 и 10 см.

4*. В прямоугольной трапеции $ABCK$ большая боковая сторона равна $3\sqrt{2}$ см, угол K равен 45°, а высота CH делит основание AK пополам. Найдите площадь трапеции.

II вариант

1. Сторона треугольника равна 12 см, а высота, проведенная к ней, в три раза меньше высоты. Найдите площадь треугольника.

2. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 см, а гипотенуза 13 см. Найдите второй катет и гипотенузу треугольника.

3. Диагонали ромба равны 10 и 12 см. Найдите его площадь и периметр.

4*. В прямоугольной трапеции $ABCD$ большая боковая сторона равна 8 см, угол A равен 60°, а высота BH делит основание AD пополам. Найдите площадь трапеции.

II уровень

I вариант

1. Смежные стороны параллелограмма равны 52 и 30 см, а острый угол равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.

2. Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $AD = 24$ см, $BC = 16$ см, $\angle A = 45°$, $\angle D = 90°$.

3. Дан треугольник ABC. На стороне AC отмечена точка C так, что $AK = 6$ см, $KC = 9$ см. Найдите площади треугольников ABK и CBK, если $AB = 13$ см, $BC = 14$ см.

4*. Высота равностороннего треугольника равна 6 см. Найдите сумму расстояний от произвольной точки, взятой внутри этого треугольника, до его сторон.

II вариант

1. Высота BK, проведенная к стороне AD параллелограмма $ABCD$, делит эту сторону на два отрезка $AK = 7$ см, $KD = 15$ см. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle A = 45°$.

2. Вычислите площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $BC = 13$ см, $AD = 27$ см, $CD = 10$ см, $\angle D = 30°$.

3. Дан треугольник MKP. На стороне MK отмечена точка T так, что $MT = 5$ см, $KT = 10$ см. Найдите площади треугольников MPT и KPT, если $MP = 12$ см, $KP = 9$ см.

4*. В равностороннем треугольнике большая сторона составляет 75% суммы двух других. Точка M, принадлежащая этой стороне, является концом биссектрисы треугольника. Найдите расстояние от точки M до меньшей стороны треугольника, если меньшая высота треугольника равна 4 см.

III уровень

I вариант

1. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ взята точка E так, что $AE = 4$ см, $ED = 5$ см, $BE = 12$ см, $BD = 13$ см. Найдите площадь параллелограмма.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AK и CE, $CE = 12$ см, $BE = 9$ см, $AK = 10$ см. Найдите AC.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $\angle A = 30°$, высота $BK = 1$ см, $BC = 2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь треугольника KMD, если M – середина отрезка BD.

4*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников ABD, ACD, BCD равны. Докажите, что данный четырехугольник является параллелограммом.

II вариант

1. В трапеции $ABCD$ AD – большее основание, CK – высота, $AB = 5$ см. На отрезке AK взята точка E так, что $AE = 3$ см, $EK = 6$ см, $KD = 1$ см, $BE = 4$ см. Найдите площадь трапеции.

2. В треугольнике ABC угол A тупой, BK и CD – высоты, $BK = 12$ см, $AK = 9$ см, $CD = 10$ см. Найдите AD.

3. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, диагональ BD перпендикулярна к стороне AB. Прямая, проходящая через середину отрезка BD – точку M параллельно AD, пересекает сторону AB в точке K, $MK = 4$ см. Найдите площадь треугольника AMD.

4*. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали. Известно, что площади треугольников ABD и ACD равны, а площади треугольников ACD и BCD не равны. Докажите, что данный четырехугольник является трапецией.

Контрольная работа № 3

I уровень

I вариант

1. Рис. 856.
Дано: $\angle A = \angle B$, $CO = 4$, $DO = 6$, $AO = 5$.
Найти: а) OB; б) $AC : BD$; в) $S_{AOC} : S_{BOD}$.

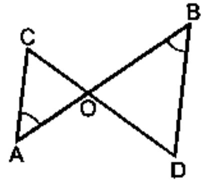


Рис. 856

2. В треугольнике ABC $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 6$ см, а в треугольнике MNK $MK = 8$ см, $MN = 12$ см, $KN = 14$ см. Найдите углы треугольника MNK, если $\angle A = 80°$, $\angle B = 60°$.

3. Прямая пересекает стороны треугольника ABC в точках M и K соответственно так, что $MK \parallel AC$, $BM : AM = 1 : 4$. Найдите периметр треугольника BMK, если периметр треугольника ABC равен 25 см.

4*. В трапеции $ABCD$ (AD и BC основание) диагонали пересекаются в точке O, $AD = 12$ см, $BC = 4$ см. Найдите площадь треугольника BOC, если площадь треугольника AOD равна 45 см^2.

II вариант

1. Рис. 857.
Дано: $PE \parallel NK$, $MP = 8$, $MN = 12$, $ME = 6$.
Найти: а) MK; б) $PE : NK$; в) $S_{MEP} : S_{MKN}$.

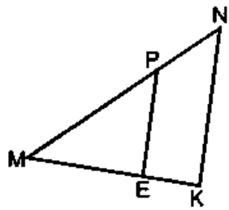


Рис. 857

2. В ΔABC $AB = 12$ см, $BC = 18$ см, $\angle B = 70°$, а в ΔMNK $MN = 6$ см, $NK = 9$ см, $\angle N = 70°$. Найдите сторону AC и угол C треугольника ABC, если $MK = 7$ см, $\angle K = 60°$.

3. Отрезки AB и CD пересекаются в т. O так, что $\angle ACO = \angle BDO$, $AO : OB = 2 : 3$. Найдите периметр треугольника ACO, если периметр треугольника BOD равен 21 см.

4*. В трапеции $ABCD$ (AD и BC основания) диагонали пересекаются в точке O, $S_{AOD} = 32$ см^2, $S_{BOC} = 8$ см^2. Найдите меньшее основание трапеции, если большее из них равно 10 см.

II уровень

I вариант

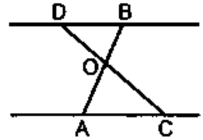


Рис. 858

1. Рис. 858.

Дано: $AO = 6{,}8$ см; $CO = 8{,}4$ см, $OB = 5{,}1$ см; $OD = 6{,}3$ см.

Доказать: $AC \parallel BD$.

Найти: а) $DB : AC$; б) $P_{AOC} : P_{DBO}$; в) $S_{DBO} : S_{AOC}$.

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O, $BD = 16$ см. На стороне AB взята точка K так, что $OK \perp AB$ и $OK = 4\sqrt{3}$ см. Найдите сторону ромба и вторую диагональ.

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = 9$ см, $BC = 8$ см, $CD = 16$ см, $AD = 6$ см, $BD = 12$ см. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

4*. В равнобедренном треугольнике MNK с основанием MK, равным 10 см, $MN = NK = 20$ см. На стороне NK лежит точка A так, что $AK : AN = 1 : 3$. Найдите AM.

II вариант

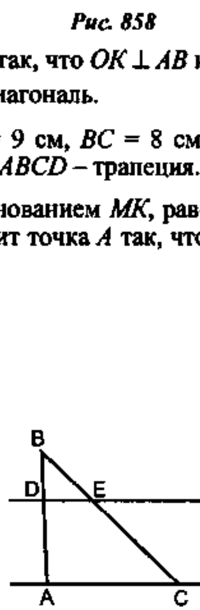


Рис. 859

1. Рис. 859.

Дано: $BD = 3{,}1$ см, $BE = 4{,}2$ см, $BA = 9{,}3$ см, $BC = 12{,}6$ см.

Доказать: $DE \parallel AC$.

Найти: а) $DE : AC$; б) $P_{ABC} : P_{DBE}$; в) $S_{DBE} : S_{ABC}$.

2. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. На стороне AB взята точка K так, что $OK \perp AB$, $AK = 2$ см, $BK = 8$ см. Найдите диагонали ромба.

3. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник, $AB = 6$ см, $BC = 9$ см, $CD = 10$см, $DA = 25$ см, $AC = 15$ см. Докажите, что $ABCD$ – трагеция.

4*. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = 40$ см, $AC = 20$ см. На стороне BC отмечена точка H так, что $BH : HC = 3 : 1$. Найдите AH.

III уровень

I вариант

1. К диагонали AC прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр DE так, что $AE = 8$ см, $CE = 4$ см.

Найти: а) $AB : BC$; б) P_{ABCD}; в) S_{ABCD}.

2. $ABCD$ – прямоугольная трапеция ($\angle A = 90°$). Точка E лежит на основании AD так, что CE перпендикулярен AD и $AE = DE$. Точка O – середина диагонали AC.

Докажите, что $BO : BC = CD : AD$.

Найдите площадь пятиугольника $ABOCD$, если площадь треугольника ACD равна 20 см^2.

3. Диагональ BD трапеции $ABCD$ делит ее на два подобных треугольника. Найдите BD, если основания BC и AD равны 8 см и 12,5 см соответственно.

4*. На сторонах MN и NK треугольника MNK взяты точки A и B соответственно так, что $\angle ABN = \angle M$. Отрезок NE является биссектрисой угла ANB, $AE : EB = 2 : 3$. Найдите отношение NK к MN.

II вариант

1. К диагонали BD прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр AK так, что $BK = 5$ см, $DK = 15$ см.

Найти: а) $BC : CD$; б) P_{BCD}; в) S_{BCD}.

2. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $\angle D = 90°$. Точка K лежит на основании AD так, что $AK = KD$ и BK перпендикулярно BC. Точка O – середина диагонали BD.

Докажите, что $AB : AD = BO : BC$.

Найдите площадь треугольника ABD, если площадь пятиугольника $ABOCD$ равна 30 см^2.

3. Диагональ AC трапеции $ABCD$ равна 8 см и делит ее на два подобных треугольника. Найдите основание BC, если AD равно 16 см.

4*. На сторонах PO и PS треугольника OPS взяты точки A и B соответственно так, что $\angle PAB = \angle S$. Биссектриса PC треугольника OPS делит сторону OS на два отрезка так, что $OC : CS = 4 : 3$. Найдите отношение PB к PA.

Контрольная работа № 4

I уровень

I вариант

1. Средние линии треугольника относятся как 2 : 2 : 4, а периметр треугольника равен 45 см. Найдите стороны треугольника.

2. Медианы треугольника ABC пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите EF, если сторона AC равна 15 см.

3. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 5$ см, $BC = 5\sqrt{3}$ см. Найдите угол B и гипотенузу AB.

4. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, сторона $BC = 7$ см, BH – высота. Найдите AH.

5. В трапеции $ABCD$ продолжения боковых сторон пересекаются в точке K, причем точка B – середина отрезка AK. Найдите сумму оснований трапеции, если $AD = 12$ см.

II вариант

1. Стороны треугольника относятся как 4 : 5 : 6, а периметр треугольника, образованного его средними линиями, равен 30 см. Найдите средние линии треугольника.

2. Медианы треугольника MNK пересекаются в точке O. Через точку O проведена прямая, параллельная стороне MK и пересекающая стороны MN и NK в точках A и B соответственно. Найдите MK, если длина отрезка AB равна 12 см.

3. В прямоугольном треугольнике PKT ($\angle T = 90°$), $PT = 7\sqrt{3}$ см, $KT = 7$ см. Найдите угол K и гипотенузу KP.

4. В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$, высота BH равна 4 см. Найдите AC.

5. В трапеции $MNKP$ продолжения боковых сторон пересекаются в точке E, причем $EK = KP$. Найдите разность оснований трапеции, если $NK = 7$ см.

II уровень

I вариант

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D так, что $BD : DC = 3 : 2$, точка K – середина отрезка AB, точка F – середина отрезка AD, $KF = 6$ см, $\angle ADC = 100°$. Найдите BC и $\angle AFK$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AC = 4$ см, $CB = 4\sqrt{3}$ см, CM – медиана. Найдите угол BCM.

3. В равнобедренной трапеции основания равны 8 и 12 см, меньший угол равен α. Найдите периметр и площадь трапеции.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если $OA = 13$ см, $OB = 10$ см.

5. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) $AB \perp BD$, $BD = 2\sqrt{5}$, $AD = 2\sqrt{10}$, CE – высота треугольника BCD, а $\operatorname{tg}\angle ECD = 3$. Найдите BE.

II вариант

1. На стороне AM треугольника ABM отмечена точка H так, что $AH : HM = 4 : 7$; точка C – середина стороны AB, точка O – середина отрезка BH, $AM = 22$ см, $\angle BOC = 105°$. Найдите CO и угол BHM.

2. В прямоугольном треугольнике MNK $\angle K = 90°$, $KM = 6$ см, $NK = 6\sqrt{3}$ см, KD – медиана. Найдите угол KDN.

3. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна 6 см, меньшее основание 10 см, а меньший угол α. Найдите периметр и площадь трапеции.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы пересекаются в точке O, $OB = 10$ см, $BC = 12$ см. Найдите гипотенузу треугольника.

5. В трапеции $ABCD$ $\angle A = 90°$, $AC = 6\sqrt{2}$, $BC = 6$, DE – высота треугольника ACD, а $\operatorname{tg}\angle ACD = 2$. Найдите CE.

II уровень

I вариант

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $BC = 1$ м, $\angle B = \alpha$. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная к ней?

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы CK и BM взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O. Найдите гипотенузу AB, если $OM = \sqrt{2}$ см.

3. Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна к боковой стороне CD, $BE \perp AC$ ($E \in AC$), основания трапеции равны 10 см и 8 см. Найти $AE : EC$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC угол при основании BC равен β. Найдите отношение высот BN и AM.

5. В прямоугольнике $ABCD$ на сторонах AB и CD отмечены точки M и N так, что $AM : MB = 1 : 3$, $CN : ND = 2 : 5$. Найдите отношение площадей четырехугольников $AMND$ и $MBCN$.

II вариант

1. В прямоугольном треугольнике MNK ($\angle K = 90°$) $KN = 1$ дм, $\angle M = \alpha$. В каком отношении делит гипотенузу высота, проведенная к ним?

2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) медианы BM и CK – пересекаются в точке O. Из точки C на BM опущен перпендикуляр CE так, что $ME = 20$ см. Найдите гипотенузу AB, если $MC = 30$ см, точка O лежит на отрезке ME.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания равны 5 см и 13 см. Диагональ BD перпендикулярна к боковой стороне AB, $CK \perp BD$ ($K \in BD$). Найти: $BK : KD$.

4. В равнобедренном треугольнике MNK угол при основании MK равен α. Найдите отношение высот ME и NH.

5. В прямоугольнике $MNKP$ на сторонах NK и MP отмечены точки E и F так, что $NE : EK = 3 : 4$, $MF : FP = 2 : 3$. Найдите отношение площадей четырехугольников $MNEF$ и $PKEF$.

Контрольная работа № 5

I уровень

I вариант

1. AB и AC – отрезки касательных, проведенных к окружности радиуса 9 см. Найдите длины отрезков AC и AO, если $AB = 12$ см.

2. Рис. 860. *Дано*: $\cup AB : \cup BC = 11 : 12$.
Найти: $\angle BCA$, $\angle BAC$.

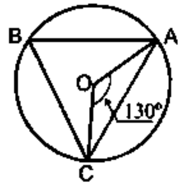


Рис. 860

3. Хорды MN и PK пересекаются в точке E так, что $ME = 12$ см, $NE = 3$ см, $PE = KE$. Найдите PK.

4. Окружность с центром O и радиусом 16 см описана около треугольника ABC так, что $\angle OAB = 30°$, $\angle OCB = 45°$. Найдите стороны AB и BC треугольника.

II вариант

1. MN и MK – отрезки касательных, проведенных к окружности радиуса 5 см. Найдите MN и MK, если $MO = 13$ см.

2. Рис. 861. *Дано*: $\cup AB : \cup AC = 5 : 3$.
Найти: $\angle BOC$, $\angle ABC$.

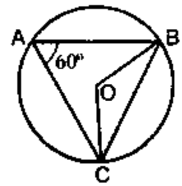


Рис. 861

3. Хорды AB и CD пересекаются в точке F так, что $AF = 4$ см, $BF = 16$ см, $CF = DF$. Найдите CD.

4. Окружность с центром O и радиусом 12 см описана около треугольника MNK так, что $\angle MON = 120°$, $\angle NOK = 90°$. Найдите стороны MN и NK треугольника.

II уровень

I вариант

1. В треугольник вписана окружность так, что три из шести получившихся отрезков касательных равны 3 см, 4 см, 5 см. Определите вид треугольника.

2. Точки A и B делят окружность с центром O на дуги AMB и ACB так, что дуга ACB на 60° меньше дуги AMB. AM – диаметр окружности. Найдите углы AMB, ABM, ACB.

3. Хорды AB и CD пересекаются в точке E так, что $AE = 3$ см, $BE = 36$ см, $CE : DE = 3 : 4$. Найдите CD и наименьшее значение радиуса этой окружности.

4. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 10 см, а биссектриса, проведенная к основанию 8 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

II вариант

1. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом 2 см так, что один из получившихся отрезков касательных равен 4 см. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 24 см.

2. Точки E и H делят окружность с центром O на дуги EAH и EKH так, что дуга EKH на 90° меньше дуги EAH, EA – диаметр окружности. Найдите углы EKA, EAH, EKH.

3. Хорды MN и PK пересекаются в точке A так, что $MA = 3$ см, $NA = 16$ см, $PA : KA = 1 : 3$. Найдите PK и наименьшее значение радиуса этой окружности.

4. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а высота, проведенная к ней, 12 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник, и радиус окружности, описанной около этого треугольника.

III уровень

I вариант

1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, и радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 20 см, 26 см и 26 см.

2. Расстояния от центра вписанной в прямоугольную трапецию окружности до концов большей боковой стороны равны 6 см и 8 см. Найдите площадь трапеции.

3. Точка M лежит на хорде AB так, что $AM : BM = 4 : 3$, $AB = 14$ см. Расстояние от центра окружности до точки M равно 4 см. Найдите радиус окружности.

4. Точка O равноудалена от сторон треугольника ABC, $\angle ACO = 34°$. Найдите $\angle AOB$.

II вариант

1. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, и радиус окружности, описанной около треугольника, стороны которого равны 16 см, 17 см и 17 см.

2. Расстояния от центра вписанной в равнобедренную трапецию окружности до концов боковой стороны равны 9 и 12 см. Найдите площадь трапеции.

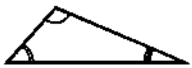
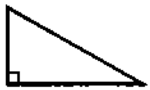
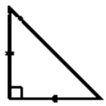
3. Точка E делит хорду AB так, что BE на 1 см меньше AE. Радиус окружности равен 9 см, $AB = 15$ см. Найдите расстояние от центра окружности до точки E.

4. Точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, $\angle ABO = 48°$. Найдите $\angle ACB$.

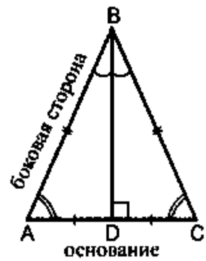
Обобщающие таблицы

Таблица 1

Треугольник

Треугольники	Разносторонние	Равнобедренные	Равносторонние
Остро-угольные			
Тупо-угольные			–
Прямо-угольные			–

Свойства равнобедренного треугольника

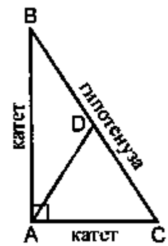


1. $AB = BC$

2. $\angle A = \angle C$

3. BD – медиана, высота, биссектриса

Свойства прямоугольного треугольника

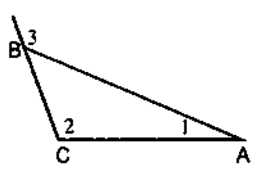


1. $\angle A + \angle B = 90°$

2. Если $\angle B = 30°$, то $AC = 0{,}5\,AB$

3. Если CD – медиана, то $CD = BD = AD$

Соотношение между сторонами и углами треугольника



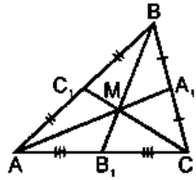
1. $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

2. $\angle A < \angle B < \angle C \Rightarrow BC < AC < AB$

3. $AB < AC + BC$, $AC < AB + BC$,
$BC < AB + AC$

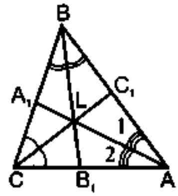
4. $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$

Медиана



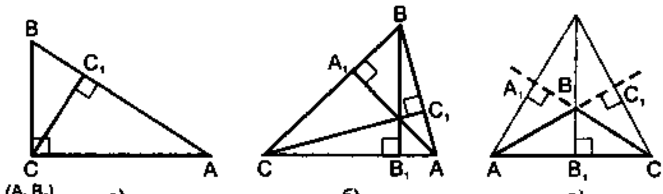
AA_1 – медиана, если $BA_1 = CA_1$

Биссектриса



AA_1 – биссектриса, если $\angle 1 = \angle 2$

Высота

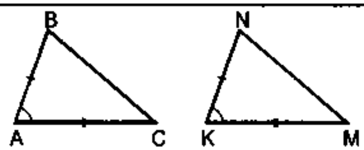
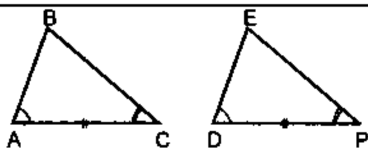
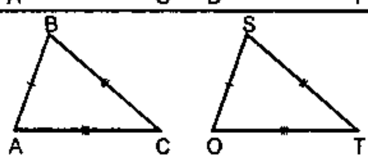


а) б) в)

AA_1 – высота, если $AA_1 \perp BC$.

Таблица 2

Признаки равенства треугольников

По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим к ней углам	
По трем сторонам	

Признаки равенства прямоугольных треугольников

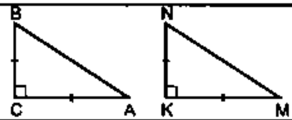
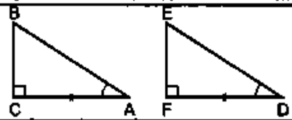
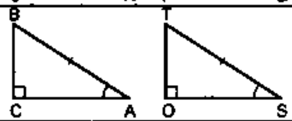
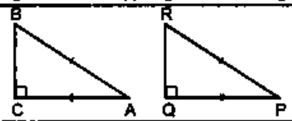
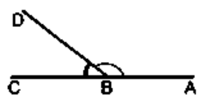
По двум катетам	
По катету и прилежащему к нему острому углу	
По гипотенузе и острому углу	
По гипотенузе и катету	

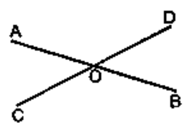
Таблица 3

Параллельные прямые и углы

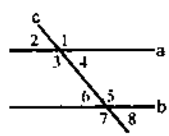
Углы, образованные при пересечении прямых



$\angle ABD$ и $\angle DBC$ – смежные
$\angle ABD + \angle DBC = 180°$

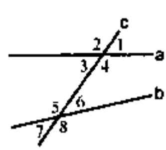


$\angle AOC$ и $\angle BOD$ – вертикальные
$\angle AOD$ и $\angle BOC$ – вертикальные
$\angle AOC = \angle BOD$; $\angle AOD = \angle BOC$



соответственные	$\angle 1$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 7$
односторонние	$\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$
накрест лежащие	$\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$

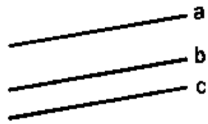
Свойства параллельных прямых



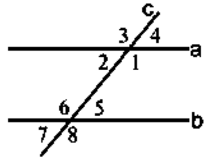
Если $a \parallel b$, то:

1. $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$ (соответственные углы равны)
2. $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$ (накрест лежащие углы равны)
3. $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$ (сумма односторонних углов $180°$)

Признаки параллельности прямых



Если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.



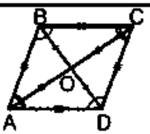
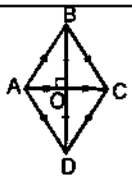
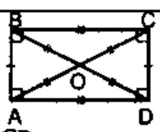
$a \parallel b$, если:
1. $\angle 1 = \angle 6$ ($\angle 2 = \angle 5$)
2. $\angle 4 = \angle 5$ ($\angle 3 = \angle 6$, $\angle 2 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 8$)
3. $\angle 1 + \angle 5 = 180^\circ$ ($\angle 2 + \angle 6 = 180^\circ$)

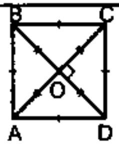
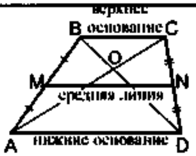
Аксиома параллельности прямых

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

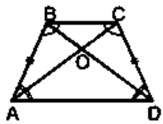
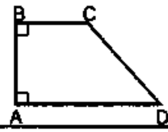
Таблица 4

Четырехугольники

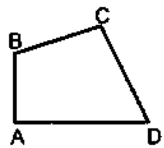
Определение	Свойства	Признаки
	Параллелограмм	
 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$	1. $AO = CO$, $BO = DO$, $O = AC \cap BD$ 2. $AB = CD$, $BC = AD$ 3. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ 4. $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle B + \angle C = \angle A + \angle D = 180^\circ$	$ABCD$ – параллелограмм, если: 1. $AB = CD$, $AB \parallel CD$ или $BC = AD$, $BC \parallel AD$. 2. $AB = CD$ и $BC = AD$. 3. $AC \cap BD = O$, $AO = CO$, $BO = DO$.
	Ромб	
 $ABCD$ – параллелограмм, $AB = BC = CD = DA$	1. $AC \perp BD$ 2. AC – биссектриса $\angle A$ и $\angle C$, BD – биссектриса $\angle B$ и $\angle D$ Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма	$ABCD$ – ромб, если: 1. $ABCD$ – параллелограмм и $AC \perp BD$ 2. $ABCD$ – параллелограмм и AC и BD – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ 3. $AB = BC = CD = DA$
	Прямоугольник	
 $ABCD$ – параллелограмм, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$	1. $AC = BD$ 2. Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма	$ABCD$ – прямоугольник, если: 1. $ABCD$ – параллелограмм и $AC = BD$ 2. $ABCD$ – параллелограмм и $\angle A = 90^\circ$ ($\angle B$, $\angle C$, $\angle D$) 3. $A = \angle B = \angle C = 90^\circ$

<table>
<tr><th colspan="3">Квадрат</th></tr>
<tr>
<td>
$ABCD$ – прямоугольник,
$AB = BC = CD = DA$</td>
<td>Квадрат обладает всеми свойствами ромба и прямоугольника</td>
<td>$ABCD$ – квадрат, если:
1. $ABCD$ – прямоугольник и $AC \perp BD$
2. $ABCD$ – ромб и $AC = BD$
3. $ABCD$ – ромб и $\angle A = 90°$
4. $ABCD$ – прямоугольник и AC и BD – биссектрисы $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$</td>
</tr>
<tr><th colspan="3">Трапеция</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">

$BC \parallel AD$, AB не параллельна CD
$MN = 0{,}5\,(BC + AD)$
$\Delta AOD \sim \Delta COB$</td>
<td>Равнобокая трапеция:

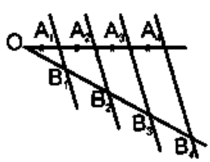
$AC = BD$,
$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Прямоугольная трапеция:</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Выпуклый четырехугольник



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

Теорема Фалеса



Если $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$
и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$,
то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

Таблица 5

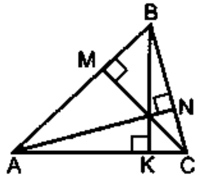
Площади фигур

Площадь треугольника

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin B =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CB \cdot \sin C$$

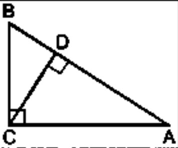
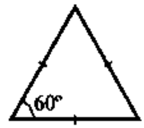
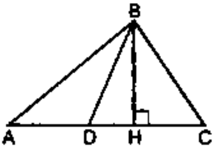
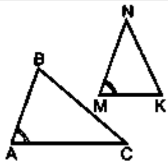
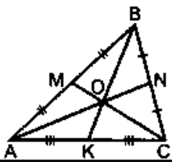


Формула Герона: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

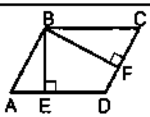
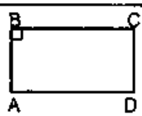
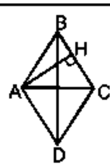
где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p=\frac{1}{2}\cdot(AB+BC+AC)$,

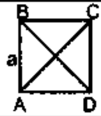
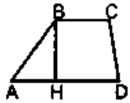
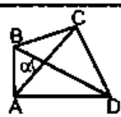
$S = rp$, где r – радиус вписанной окружности.

$S=\frac{abc}{4R}$, где R – радиус описанной окружности.

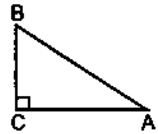
$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC$, $CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}$ 	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ 
$\frac{S_{ABD}}{S_{BCD}}=\frac{AD}{DC}$ 	$\frac{S_{ABC}}{S_{MNK}}=$ $=\frac{AB\cdot AC}{MN\cdot MK}$ 
$S_{AOM}=S_{BOM}=S_{BON}=S_{CON}=S_{AOK}=S_{COK}$ 	

Площади четырехугольников

Параллелограмм		$S = AD\cdot BE = CD\cdot BF$ $S = AB\cdot AD\cdot \sin A =$ $= BA\cdot BC\cdot \sin B$
Прямоугольник		$S = AB\cdot BC$
Ромб		$S = 0{,}5\cdot AC\cdot BD$ $S = AB^2\cdot \sin A = AB^2\cdot \sin B$ $S = AB\cdot AH$

Квадрат		$AC = d$ $S = a^2$ $S = 0{,}5d^2$
Трапеция		$S = 0{,}5\ CH\,(BC + AD)$
Выпуклый четырехугольник		$S = 0{,}5 \cdot AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$

Теорема Пифагора



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

Если $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то ΔABC – прямоугольный.

Таблица 6

Подобные треугольники

Определение

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$,

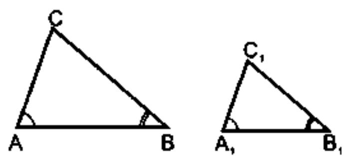
если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

$\dfrac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = k$; $\quad \dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}} = k^2$.

Признаки подобия треугольников

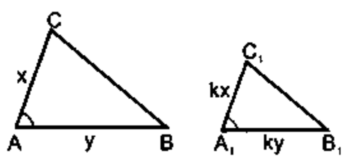
I признак

Если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



II признак

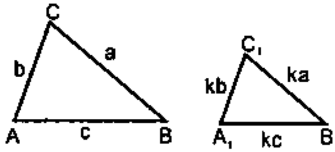
Если $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}(= k)$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$



III признак

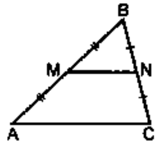
Если $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}(=k)$,

то $\Delta ABC \sim \Delta\, A_1B_1C_1$

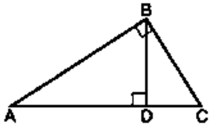


Применение подобия

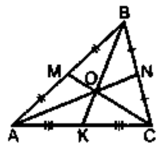
MN – средняя линия треугольника
$MN \parallel AC$, $MN = 0{,}5\ AC$



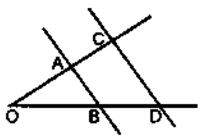
$BD=\sqrt{AD\cdot DC}$
$AB=\sqrt{AD\cdot AC}$
$BC=\sqrt{CD\cdot AC}$
$\Delta ABD \sim \Delta BCD \sim \Delta ACB$



$AN \cap BK \cap CN = O$
$\dfrac{AO}{NO}=\dfrac{BO}{KO}=\dfrac{CO}{MO}=\dfrac{2}{1}$



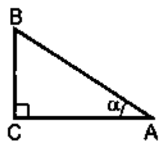
Если $AB \parallel CD$, то $\dfrac{AO}{OB}=\dfrac{AC}{BD}$



Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

$\sin\alpha = \dfrac{BC}{AB}$; $\cos\alpha = \dfrac{AC}{AB}$; $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

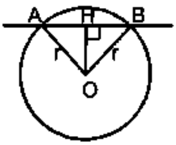
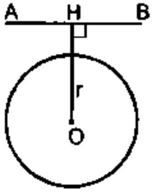
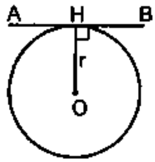


α	30°	45°	60°
sin α	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos α	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg α	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Таблица 7

Окружность

Взаимное расположение прямой и окружности

 *AB* – секущая, если $OH < r$	 *AB* не пересекается с окружностью, если $OH > r$	 *AB* – касательная, если $OH = r$

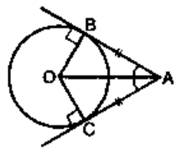
Свойство касательной:

$AB \perp OH$ (*OH* – радиус, проведенный в точку касания *H*)

Признак касательной:

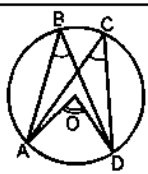
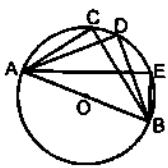
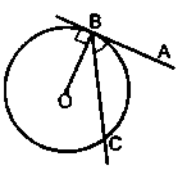
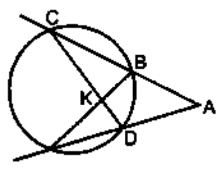
Если $AB \perp OH$, то *AB* – касательная

Свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки:

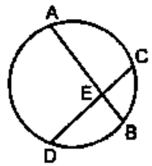
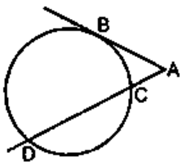
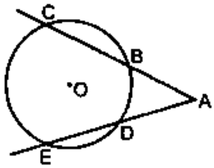


$AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$

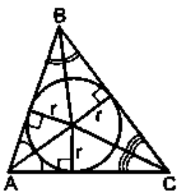
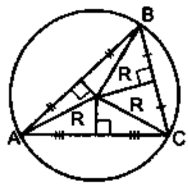
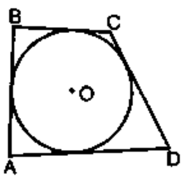
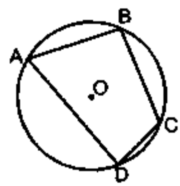
Углы в окружности

 $\angle AOD$ – центральный. $\angle AOD = \cup AD$ $\angle ABD$, $\angle ACD$ – вписанные $\angle ABD = \angle ACD = 0{,}5 \cup AD$	 $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90°$
 $\angle ABC = 0{,}5 \cup BC$	 $\angle CAE = 0{,}5\ (\cup CE - \cup BD)$ $\angle CKE = 0{,}5(\cup CE + \cup BD)$

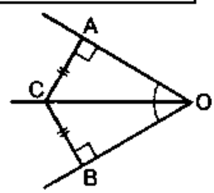
Свойства отрезков хорд, секущих и касательных

		
$AE \cdot BE = CE \cdot DE$	$AB^2 = AC \cdot AD$	$AB \cdot AC = AD \cdot AE$

Вписанная и описанная окружности

	
O – точка пересечения биссектрис	O – точка пересечения серединных перпендикуляров
	
$AB + CD = BC + AD$	$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 90°$

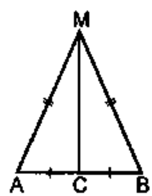
Свойства биссектрисы угла



1. Если OC – биссектриса угла O, то $AC = BC$

2. Если $AC = BC$, то OC – биссектриса угла O

Свойства серединного перпендикуляра к отрезку



1. Если MC – серединный перпендикуляр к отрезку AB, то $MA = MB$

2. Если $MA = MB$, то M лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB

СОДЕРЖАНИЕ